



# Convection et magnétisme dans les étoiles de type solaire (G&K)

Long Olivier Do Cao

## ► To cite this version:

Long Olivier Do Cao. Convection et magnétisme dans les étoiles de type solaire (G&K). Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 2013. Français. NNT : . tel-00983335

**HAL Id: tel-00983335**

**<https://theses.hal.science/tel-00983335>**

Submitted on 25 Apr 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE D'ÎLE-DE-FRANCE  
UNIVERSITÉ PARIS-DIDEROT

## THÈSE DE DOCTORAT

présentée pour obtenir le grade de

docteur de l'Université Paris-Diderot

Spécialité : Astronomie et Astrophysique

par

**LONG, OLIVIER DO CAO**

---

### **Convection et magnétisme dans les étoiles de type solaire (G & K)**

---

Thèse dirigée par Allan Sacha BRUN  
Soutenue le 31 mai 2013

Jury composé de :

Pr. Sylvain CHATY .....	Président
Dr. Nadège MEUNIER .....	Rapportrice
Dr. François LIGNIÈRES .....	Rapporteur
Dr. Allan Sacha BRUN .....	Directeur de thèse
Dr. Laurène JOUVE .....	Examinatrice
Dr. Thierry MONTMERLE .....	Examineur

Laboratoire AIM Paris-Saclay (CEA/Irfu - Uni. Paris Diderot - CNRS/INSU)  
Centre d'études de Saclay, 91191 Gif-Sur-Yvette, France  
[long.docao@cea.fr](mailto:long.docao@cea.fr)







## Remerciements

En avant-propos, cette section, je dois le dire, a été la plus difficile à écrire. D'abord parce que c'est probablement celle qui sera la plus lue. Ensuite, parce que je ne dois oublier personne (et les personnes qui se reconnaîtront et qui me connaissent savent que ce n'est pas chose aisée!). Et surtout, parce qu'elle porte la mission délicate, s'il en est, de transcrire la véritable reconnaissance que j'éprouve aux (nombreuses!) personnes citées ci-après. Alors, je ferais de mon mieux. C'est ainsi tout de même que je vous exprime ma gratitude, parce que remercier des gens, malheureusement, ça ne se prend pas en photo.

Je remercie tout d'abord les acteurs qui m'ont permis de mener à bien cette thèse. Mes pensées vont en premier lieu au directeur du Service d'Astrophysique (SAP), Pierre-Olivier Lagage et à son adjoint Michel Talvard, auprès desquels j'ai trouvé une proximité devenue rare. Je dois également remercier mon directeur de thèse Sacha Brun pour m'avoir fait comprendre ce qu'était la rigueur, ainsi que le directeur de l'Institut d'Astrophysique de Paris (IAP) Laurent Vigroux pour m'avoir accueilli dans son laboratoire dans la dernière période de mon travail. Je n'oublie pas non plus le reste du personnel du SAP, de l'IAP et de l'observatoire tels que les secrétaires et techniciens qui nous rendent de toute évidence la vie plus facile, et font en sorte que notre travail soit agréable.

J'adresse également mes remerciements à l'ensemble de mon jury de thèse : Nadège Meunier, François Lignières, Thierry Montmerle et mon président Sylvain Chaty. Leurs remarques justes et pertinentes ont permis une amélioration significative du travail présenté dans ce manuscrit. Parce que mon parcours a été jalonné de nombreuses péripéties, j'ai eu la chance d'avoir bénéficié des conseils de guides bienveillants, en particulier à l'Ecole Doctorale. C'est la raison pour laquelle je tiens personnellement à exprimer ma gratitude envers Didier Pelat, Daniel Rouan, mais surtout Jacques Le Bourlot qui n'a jamais cessé de m'encourager.

Au sein du SAP, j'ai eu le privilège d'avoir été entouré par une équipe absolument extraordinaire, tant dans leurs compétences que dans leur humanité. C'est dans ces conditions que j'ai eu la chance de côtoyer de chaleureux scientifiques tels que Rui et Nicolas. Je tends évidemment la main aux thésards qui nous ont rejoint à bord du LDEE et à qui je souhaite un merveilleux parcours. Bon courage à Lucie, Tug et Victor! J'ai également apprécié le fruit de la collaboration avec Laurène Jouve qui, au delà d'avoir été aussi un membre de mon jury, m'a accueilli à Toulouse de la meilleure façon qui soit. J'aurais été très heureux de poursuivre cette collaboration, et je l'admire beaucoup pour tout son travail.

Mes (ex-)co-bureaux 232 ont évidemment fait partie de ma vie au CEA. J'ai beaucoup appris à leurs côtés, et baigné dans une euphorie continue. Je remercie d'abord **astrugar** pour son aide permanente, et pour m'avoir appris (presque) à commander des pizzas avec emacs, **ptrembli** pour nous avoir fait partager sa culture cinématographique "variée" et enfin **julienfaure**<sup>1</sup>. Julien, c'est avec une joie teintée de tristesse que je te passe le flambeau de vétéran du bureau (que je n'ai certes pas conservé très longtemps...). Ne fais pas ton noob hein, tu n'as plus le droit maintenant!

J'ai eu également l'immense chance d'avoir été entouré d'amis généreux et tous exceptionnels. C'est ainsi que je remercie Kevin (le blond), Camille et Alexis avec qui j'ai partagé de nombreuses sorties sportives que je me remémore toujours avec plaisir : ma première séance d'alpinisme, la montée de nuit du Teide à Tenerife, et les quelques (rares, je sais!) sorties pour aller courir le midi et manger les sandwiches dégueux du distributeur. Je remercie aussi Aurélie dont j'ai eu l'immense fierté d'avoir contribué aux photos de son mariage. Sa confiance me va droit au cœur. Je me dois également de remercier Pierre-Emmanuel, Lionel et Kevin (le pas blond) pour leur présence chaleureuse et leur aide.

---

1. et pas **jfaure**! comme j'ai pu le voir dans quelques papiers tels que [Tremblin \(2012\)](#)

Et enfin Diana pour avoir partagé de nombreux moments tels que le gaspacho, les bagels de Noah et la powerbAll. Peut être vais-je accepter, un jour, ta demande d'ami sur skype.

Mais je ne veux pas oublier non plus ceux qui, à Paris, m'ont apporté leur amitié et leur soutien. Le choix de venir travailler à l'IAP, salvateur, n'aurait pu avoir son effet sans la présence de ceux qui y travaillent au quotidien : Yann (yes man, conquérons le monde!), Etienne (et les soirées Battlestar Galactica!), Radwan, Maryame, Guillaume dont j'ai d'ailleurs couvert officiellement le mariage, je t'en remercie, Rinat (even if you are fraking cylon) et Amale. Mais aussi mes co-bureaux Leandro, Saeed, Laleh, Mélanie et Julia dont la bonne humeur permanente a fait de ce bureau un havre de paix. Je termine en souhaitant bon courage aux nombreux thésards qui à l'heure de la publication de ce manuscrit sont dans leur dernière ligne droite. Vous avez tous pris le temps d'assister à ma soutenance. Je ne pourrais malheureusement pas vous rendre la pareille, et je le regrette sincèrement.

Et puis, il y a tous les autres, les inclassables, mais qui ont contribué de manière tout aussi importante à l'accomplissement de ce long périple : Shan qui est venue spécialement de Suisse pour la soutenance (certes pas tout à fait, mais j'aime à croire que si!) et Stefano qui a fait de même d'Italie. Je remercie aussi avec bonheur Cédric qui mériterait la médaille de meilleur coloc' de toute la Terre, pour avoir fait de notre appart' à Massy ("The place to be!" comme on dit chez nous), un endroit où il fait bon vivre et où on mange de bonnes crêpes faites maison. Et je remercie également Jon, Sihane, Silvère (et les brunch du crous du dimanche matin), Thierry Semaan pour ses conseils, Anne-Lise que j'admire pour sa "viscosité", Céline et David. Je n'oublie pas non plus le fameux trio avec qui j'ai passé tant de temps : Nicolas, Jeremy et Tefy. J'exprime une profonde gratitude tout particulièrement au premier qui m'a soutenu, parfois à des heures impossibles, et qui dans l'ombre, m'a procuré ses sages conseils pour les choix les plus décisifs. Fred, je crois qu'il n'y a pas de mots suffisamment puissants pour te remercier de m'avoir emmené le long du John Muir's Trail. C'était, de loin, la randonnée la plus épique, la plus longue, la plus belle de toute ma vie. Parce que je confesse avoir été "tendu" pendant la rédaction du manuscrit, j'exprime ma reconnaissance aussi envers Camille pour m'avoir supporté pendant tout cette période et de m'avoir appris le snowboard à Annecy. Et enfin, Justine, pour avoir joué un rôle prépondérant aussi bien au début, qu'à la toute fin, dans une arrivée angélique, merci.

Comme chacun l'a probablement remarqué au cours de cette thèse, j'ai repris mon premier prénom, le vrai, signature de mes origines, Long. Ce changement, peu commun probablement, traduit la transformation par laquelle je suis passée au cours de ces 3 années de thèse. Il est aussi le reflet de l'attention que je porte désormais sur ma petite famille. Cette dernière m'a soutenu sans aucune retenue, et toujours justement. Papa, maman, vous m'avez confié un jour quelle était votre mission. Je peux le clamer désormais, le poing fermé et l'esprit ouvert. Votre mission est désormais accomplie. Et je me tourne désormais vers ma petite sœur. Mai Loan, je n'ai pas toujours été là ces dernières années, en particulier dans les moments difficiles. J'espère que tu me pardonneras. Mais ton grand frère est de retour, quelque soit les besoins que tu auras. Peut être, enfin, je pourrais remplir le rôle que papa et maman nous ont donné, par nos prénoms.

Finally, there is one very last person I'd like to thank. He has been, among all, the best scientist I have worked with so far. Within these 3 years, he has devoted a large part of his time in helping me on various matters, whether professional or personal. What I have learned on his sides are beyond imagination. And I am very proud to have worked under his direction. He just got a permanent position at Exeter, and he totally deserves it. I'm almost jealous of his next PhD student. I hope the latter will realize how lucky he is. Truth is, I would not be writting those lines if he had not been there. So what's next, Sean? Everyday I'm wearing the watch you gave me. During my travels, I'm wearing the sunglasses you gave me. That remind me how your presence has been and will always be a source of self-confidence, which give me strength and hope, when needed, in the upcoming adventures that have already begun, here, in Senegal.

— M'bour, Senegal, le 15 September 2013.







## Résumé

Cette thèse étudie l'origine et le fonctionnement du magnétisme et des processus dynamiques dans les étoiles de type solaire en se basant sur un travail théorique et sur des simulations numériques multidimensionnelles. À partir de simulations à la fois 2D (code STELEM) et 3D (code ASH) nous étendons aux autres étoiles de types spectral G & K les travaux récents effectués sur le Soleil. Grâce à cette double approche nous sommes capables de mettre en évidence les mécanismes et paramètres clés pour expliquer le magnétisme et la rotation des étoiles.

Le manuscrit est séparé en 4 parties. La première introduit le contexte et les notions clés de la dynamique des intérieurs stellaires, et en particulier, l'effet dynamo. On s'appuiera sur les connaissances détaillées que l'on a du Soleil, puis on les comparera aux autres étoiles pour distinguer ce qui lui est spécifique de ce qui est générique aux étoiles.

La deuxième partie présente les résultats obtenus en utilisant le code 2D STELEM. Nous modélisons alors l'évolution du champ magnétique à grande échelle spatiale sur des temps de l'ordre de la période du cycle solaire (environ 11 ans) pour mieux comprendre l'effet dynamo qui lui a donné naissance. Nous montrons alors que les modèles solaires actuels ne sont pas en mesure de reproduire les observations lorsque l'on étend ce modèle à des étoiles en rotation rapide, sauf si l'on prend en compte le mécanisme de pompage turbulent, et sous des conditions précises. Puis, on a amélioré ces modèles cinématiques en incorporant l'effet Malkus Proctor qui prend en compte la rétroaction de la force de Lorentz sur la vitesse longitudinale. Nous montrons alors que l'on est capable de reproduire les oscillations torsionnelles solaires et de voir comment leurs caractéristiques évoluent avec le taux de rotation.

La troisième partie se concentre sur les simulations numériques hautes performances 3D avec le code ASH. Contrairement au code précédent, ce dernier résoud l'intégralité des équations de la MHD. Nous avons étudié, d'abord hydrodynamiquement, comment la masse et la rotation influencent les propriétés de l'enveloppe convective, d'abord en la simulant de manière isolée, puis en prenant en compte le couplage avec la zone radiative sous jacente. Nous montrons que la dynamique est principalement régie par le nombre de Rossby et que ses caractéristiques deviennent opposées lorsque ce nombre devient supérieur à l'unité. Nous donnons également les lois d'échelles reliant les caractéristiques de l'écoulement (rotation différentielle, circulation méridienne etc.) en fonction de la masse et du taux de rotation.

Enfin, la dernière partie se veut être une perspective générale du travail présenté précédemment. Nous développons des simulations 3D dans des étoiles en rotation rapide, prenant en compte le champ magnétique. Dans ces étoiles, le champ magnétique s'organise en rubans entrelacés concentrés à l'équateur et tire son énergie magnétique à la fois de l'énergie cinétique des mouvements convectifs mais aussi de la forte rotation différentielle. Enfin, nous évaluons comment l'utilisation conjointe de ces deux types de simulations (2D et 3D) peut être bénéfique.





## Abstract

This thesis aims at understanding the internal dynamics of solar-type stars and the origin of their magnetism. We will explore the complex nonlinear interactions between convection, rotation and magnetism conducting both 2D (STELEM code) and 3D (ASH code) numerical simulations. This dual approach will unveil the mechanisms and key parameters behind those physical processes. While the Sun has played a central role in previous studies, this work extends our knowledge to G and K stars.

This manuscript is divided into 4 parts. The first one introduces the concepts behind internal stellar dynamics, and emphasizes the dynamo effect. Accurate observations of the Sun will be compared to stellar data, allowing us to determine what is specific to the Sun and what is generic for all stars.

The second part reports the results obtained with the 2D STELEM code. This code allows us to study the generation and evolution of the large scale magnetic fields on a timescale comparable to the solar cycle period (11 years), giving us insight into the underlying dynamo processes at work. We show that the current solar models cannot reproduce the observations, when applied to rapidly rotating stars, unless we consider a turbulent pumping mechanism under specific conditions. Then, we have improved these kinematic models by taking into account the large scale magnetic field feedback on the longitudinal velocity component, called the Malkus Proctor effect. The models are now able to reproduce the solar torsional oscillations and can predict how their properties evolve with rotation rate.

The third part focuses on 3D numerical simulations running on massively parallel supercomputers, using the ASH code. In contrast with the previously described code, ASH explicitly resolves the full MHD equations. We have studied (hydrodynamically) how the convective properties of G and K stars change as function of mass and rotation rate, first by considering the convective envelope alone, then by taking into account the dynamical coupling with the underlying radiative zone. We show that the dynamics is mainly driven by the Rossby number, and that the flow characteristics qualitatively change when the Rossby number is above unity. We also derive scaling laws for the global flows properties (differential rotation, meridional circulation, etc.) as function of mass and rotation rate.

The last part sums up the main results and the perspectives of the work presented above. We are developing 3D numerical simulations involving magnetic dynamo action in rapidly rotating stars. In these stars, the magnetic field is self-organized in strong wreathes close to the equator extracting its energy from the convective kinetic energy but also from the strong differential rotation. Finally, we explain the benefits of a combined approach that uses both 2D and 3D models.



<b>I</b>	<b>Anatomie et métabolisme des étoiles</b>	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>Processus physiques à l'œuvre au sein des étoiles</b>	<b>27</b>
1.1	Que les lumières soient au firmament du ciel . . . . .	27
1.2	Variété des populations stellaires . . . . .	30
1.2.1	Naissance des étoiles . . . . .	31
1.2.2	Phase principale . . . . .	33
1.2.3	Évolution post-séquence principale . . . . .	33
1.2.4	Classification des étoiles . . . . .	35
1.3	Structure interne des étoiles de type solaire (G & K) . . . . .	37
1.4	Convection et turbulence . . . . .	39
1.5	Rotation des étoiles . . . . .	42
1.6	Activité magnétique . . . . .	44
1.6.1	Champ magnétique à la surface du Soleil . . . . .	45
1.6.2	Propriétés globales du champ magnétique dans les étoiles de faible masse . . . .	47
1.6.3	Les cycles magnétiques . . . . .	48
<b>2</b>	<b>Origine du magnétisme stellaire : le concept de dynamo fluide</b>	<b>53</b>
2.1	Dynamique des fluides et plasmas . . . . .	54
2.1.1	Cas Hydrodynamique . . . . .	54
2.1.2	Cas Magnétohydrodynamique . . . . .	61
2.2	Effet Dynamo . . . . .	63
2.2.1	Généralités sur la dynamo . . . . .	63
2.2.2	Les différents types de dynamo . . . . .	65
2.2.3	Mécanismes générateurs de champ magnétiques à grande échelle . . . . .	68
2.2.4	Équation d'induction en dynamo champ moyen . . . . .	74
2.2.5	Équations adimensionnées . . . . .	76
2.3	Les dynamos naturelles et expérimentales . . . . .	79
2.3.1	Dynamo stellaire . . . . .	79
2.3.2	Dynamo planétaire . . . . .	81
2.3.3	Dynamo galactique . . . . .	82
2.3.4	Dynamos expérimentales . . . . .	83

<b>II</b>	<b>Modélisation des cycles magnétiques en dynamo champ moyen</b>	<b>85</b>
<b>3</b>	<b>Effets du pompage magnétique sur les cycles stellaires</b>	<b>87</b>
3.1	Cycles magnétiques dans les étoiles de type solaire . . . . .	87
3.2	Le pompage turbulent dans la dynamo champ moyen . . . . .	90
3.3	Modélisation de la dynamo stellaire en présence de pompage magnétique . . . . .	93
3.4	Caractérisation des cycles pour différents taux de rotation . . . . .	96
3.4.1	Modèle Standard . . . . .	96
3.4.2	Modèle Référence . . . . .	99
3.4.3	Variation du taux de rotation . . . . .	102
3.5	Conclusion et perspectives . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Dynamo non linéaire des étoiles de type solaire</b>	<b>121</b>
4.1	Modulation de la rotation différentielle et des cycles magnétiques . . . . .	122
4.1.1	Oscillations torsionnelles . . . . .	122
4.1.2	Modulation de long terme . . . . .	124
4.1.3	Parité dans les simulations en MFDT . . . . .	127
4.2	L'effet Malkus Proctor . . . . .	128
4.3	Tests de validation . . . . .	131
4.3.1	Cœur en rotation en l'absence de champ magnétique . . . . .	132
4.3.2	Champ dipolaire fixe . . . . .	133
4.3.3	Oscillations torsionnelles en dynamo $\alpha\Omega$ . . . . .	134
4.4	Vers un modèle solaire complet . . . . .	138
4.4.1	Influence de la diffusivité à la surface . . . . .	139
4.4.2	Caractéristiques de la rétroaction . . . . .	141
4.5	Variation du taux de rotation . . . . .	144
4.6	Conclusion et perspectives . . . . .	145
<b>III</b>	<b>Simulations 3D de la dynamique interne</b>	<b>149</b>
<b>5</b>	<b>Dynamique de la zone convective</b>	<b>151</b>
5.1	Motivations pour les simulations numériques 3D des intérieurs stellaires . . . . .	151
5.2	Approches numériques pour modéliser la zone convective . . . . .	153
5.2.1	Le défi . . . . .	153
5.2.2	Approche DNS . . . . .	154
5.2.3	Approche LES . . . . .	155
5.3	Description du modèle . . . . .	156
5.3.1	Équations résolues . . . . .	156
5.3.2	Etat de référence 1D . . . . .	158
5.3.3	Paramètres de simulation . . . . .	161
5.3.4	Vers un état d'équilibre énergétique . . . . .	163
5.4	Propriétés de la convection . . . . .	166
5.5	Écoulements à grandes échelles . . . . .	171
5.5.1	Rotation différentielle . . . . .	172
5.5.2	Circulation méridienne . . . . .	174
5.6	Conclusion et perspectives . . . . .	176

<b>6</b>	<b>Du rôle d'une zone radiative sur la dynamique de l'enveloppe convective</b>	<b>191</b>
6.1	Importance de la zone stable et de la rotation . . . . .	192
6.2	Description du modèle . . . . .	193
6.2.1	Description générale . . . . .	193
6.2.2	Viscosité et diffusivité . . . . .	195
6.2.3	Propriétés générales . . . . .	197
6.3	Dynamique de la zone convective . . . . .	201
6.4	Écoulements à grande échelle . . . . .	206
6.4.1	Rotation différentielle . . . . .	206
6.4.2	Circulation méridienne . . . . .	208
6.4.3	Lois d'échelles en fonction de la masse et du taux de rotation . . . . .	210
6.5	Maintien des écoulements moyens . . . . .	214
6.5.1	Transport de moment cinétique . . . . .	214
6.5.2	Balance de vent thermique . . . . .	217
6.6	Pénétration des plumes convectives . . . . .	219
6.7	Conclusion et perspectives . . . . .	221
<b>IV</b>	<b>Complémentarité des différentes simulations numériques</b>	<b>225</b>
<b>7</b>	<b>Vers des modèles de dynamo convective avec tachocline</b>	<b>227</b>
7.1	Simulations 3D MHD non linéaires des dynamos stellaires . . . . .	227
7.1.1	Interactions entre la turbulence, la rotation et le magnétisme . . . . .	227
7.1.2	Simulations numériques 3D de la dynamo solaire . . . . .	228
7.1.3	Rubans magnétiques dans les étoiles en rotation rapide . . . . .	230
7.2	Description du modèle . . . . .	231
7.2.1	Approche numérique de la dynamo convective . . . . .	231
7.2.2	Dépendance du seuil dynamo aux paramètres de l'écoulement . . . . .	232
7.3	Aspects énergétiques . . . . .	233
7.4	Topologie du champ magnétique . . . . .	234
7.5	Conclusion et perspectives . . . . .	234
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives générales</b>	<b>237</b>
8.1	Synthèse des résultats STELEM . . . . .	237
8.2	Synthèse des résultats ASH . . . . .	238
8.3	Vers une utilisation conjointe des simulations 2D et 3D . . . . .	240
<b>V</b>	<b>Annexes</b>	<b>267</b>
<b>A</b>	<b>Nombres sans dimension</b>	<b>268</b>
<b>B</b>	<b>Le code STellar ELEMENTS (STELEM)</b>	<b>271</b>
B.1	La méthodes des éléments finis . . . . .	271
B.2	Intégrations spatiale et temporelle . . . . .	273
B.3	L'effet Malkus Proctor . . . . .	278
<b>C</b>	<b>Le code Anelastic Spherical Harmonics (ASH)</b>	<b>281</b>

<b>D</b>	<b>Vorticité et vent thermique</b>	<b>285</b>
D.1	Équation de la vorticité . . . . .	285
D.2	Vent thermique . . . . .	286

---

## Table des figures

---

1.1	Portraits de physiciens et astronomes de la physique stellaire. . . . .	28
1.2	Diagramme de Hertzsprung Russel. . . . .	31
1.3	Taux de génération d'énergie par fusion nucléaire. . . . .	34
1.4	Diagramme Couleur-Magnitude de M45 et M3. . . . .	35
1.5	Classification des étoiles. . . . .	36
1.6	Structure interne du Soleil. . . . .	38
1.7	Localisation de la zone convective en fonction de la masse de l'étoile. . . . .	40
1.8	Image de la granulation à la surface du Soleil dans la raie du CaII. . . . .	40
1.9	Spectre de puissance de la vitesse Doppler observée par l'instrument MDI. . . . .	41
1.10	Profil de rotation interne du Soleil. . . . .	42
1.11	Rotation différentielle dans les étoiles. . . . .	44
1.12	Saturation de la luminosité en X en fonction du taux de rotation. . . . .	45
1.13	Champ magnétique et granulation à la surface du Soleil. . . . .	46
1.14	Propriétés globales du champ magnétique dans les étoiles de faible masse. . . . .	48
1.15	Diagramme papillon et cycles magnétiques solaires. . . . .	49
1.16	Renversement de polarité au cours des cycles magnétiques solaires. . . . .	51
1.17	Évolution du nombre de tâches solaires entre 1610 et 2010. . . . .	52
1.18	Observations de cycles d'activité magnétique dans les étoiles de type solaire. . . . .	52
2.1	Effet de la variation du nombre de Reynolds sur l'écoulement d'un fluide. . . . .	57
2.2	Photo d'un écoulement turbulent. . . . .	59
2.3	Spectre de Kolmogorov caractéristique. . . . .	60
2.4	Schéma de la boucle dynamo. . . . .	64
2.5	Mécanisme Stretch-Twist-Fold . . . . .	66
2.6	Simulation numérique de la dynamo à petite échelle dans une zone convectivement instable. . . . .	68
2.7	Schéma de l'effet $\Omega$ . . . . .	69
2.8	Schéma de l'effet $\alpha$ . . . . .	70
2.9	Schéma de l'effet Babcock Leighton. . . . .	72
2.10	Schéma d'une circulation méridienne unicellulaire. . . . .	73
2.11	Différents régimes dynamos atteints dans une variété de systèmes sujets à l'effet dynamo. . . . .	79
2.12	Vue schématique de la dynamo terrestre. . . . .	82
2.13	Structure interne et champ magnétique dans différents corps du système solaire. . . . .	83
2.14	Dispositif des expériences de type VKS. . . . .	84



3.1	Variation de la période des cycles magnétiques en fonction du taux de rotation dans les étoiles de type F à K. . . . .	88
3.2	Simulations numériques mettant en avant le phénomène de pompage magnétique turbulent. . . . .	90
3.3	Profil de la rotation différentielle. . . . .	94
3.4	Profil de la diffusivité magnétique et du terme de Babcock Leighton. . . . .	95
3.5	Profil de la circulation méridienne. . . . .	96
3.6	Diagramme papillon du modèle standard. . . . .	98
3.7	Période du cycle magnétique en fonction de l'amplitude et du profil de la circulation méridienne. . . . .	99
3.8	Profil radial et latitudinal du pompage turbulent. . . . .	100
3.9	Diagramme papillon du modèle de référence. . . . .	101
3.10	Séries d'images montrant l'évolution du champ magnétique au cours d'un cycle magnétique dans le modèle de référence. . . . .	102
3.11	Période et amplitude du cycle magnétique en fonction du taux de rotation. . . . .	103
3.12	Diagramme temps latitudes atteints dans les simulations pour différents taux de rotation. . . . .	104
3.13	Observations de l'amplitude du champ magnétique en fonction de la période de rotation. . . . .	106
4.1	Observation des oscillations torsionnelles à la surface du Soleil. . . . .	122
4.2	Observation du profil latitudinal et radial des oscillations torsionnelles. . . . .	123
4.3	Simulation numérique reproduisant la modulation et le changement de parité au cours des cycles magnétiques. . . . .	126
4.4	Propagation de la rotation solide du cœur par viscosité. . . . .	133
4.5	Propagation de la rotation solide du cœur en présence d'un dipôle magnétique stationnaire. . . . .	135
4.6	Profil de la rotation différentielle. . . . .	136
4.7	Évolution des champs dynamiques $A_\phi$ , $B_\phi$ et $\omega$ dans une dynamo de type $\alpha - \Omega$ en présence de l'effet Malkus-Proctor. . . . .	137
4.8	Saturation non linéaire de l'énergie magnétique et cinétique et diagramme papillon associée dans une dynamo $\alpha - \Omega$ avec effet Malkus-Proctor. . . . .	138
4.9	Diagramme papillon dans une dynamo de type BL- $\omega$ avec diffusivité magnétique constante dans l'enveloppe convective. . . . .	139
4.10	Profil de diffusivité magnétique prenant en compte la supergranulation. . . . .	140
4.11	Variation du rapport entre l'amplitude du champ magnétique aux pôles et à l'équateur en fonction de la diffusivité magnétique de surface. . . . .	140
4.12	Diagramme temps rayon de $\omega$ et de la force de Lorentz dans un modèle BL- $\Omega$ . . . . .	141
4.13	Évolution des champs dynamiques $A_\phi$ , $B_\phi$ et $\omega$ dans une dynamo de type BL- $\Omega$ en présence de l'effet Malkus-Proctor. . . . .	142
4.14	Diagramme papillon avec $\eta_\alpha = 20$ . . . . .	143
4.15	Oscillation torsionnelle obtenue à la base de la zone convective. . . . .	143
4.16	Profil de la rotation différentielle en fonction du taux de rotation. . . . .	145
4.17	Diagrammes papillon à différents taux de rotation sous l'influence de l'effet Malkus-Proctor. . . . .	146
5.1	Luminosité et température effective en fonction de la masse. . . . .	153
5.2	Simulation directe de la granulation solaire. . . . .	154
5.3	Coupes à différentes profondeurs de la convection typique atteinte dans les simulations globales. . . . .	155
5.4	Structure radiale des étoiles simulées. . . . .	160
5.5	Profile radial des variables thermodynamiques. . . . .	161
5.6	Profile radial des différents processus de transports de l'énergie. . . . .	164
5.7	Saturation non linéaire de l'énergie cinétique dans les modèles 3D ASH. . . . .	166

5.8	Projection de Mollweide de la vitesse radiale et de la fluctuation de température à différentes profondeurs. . . . .	167
5.9	Coupe équatoriale et méridionale de la vitesse radiale. . . . .	169
5.10	Correspondance entre la vitesse radiale, la température et la vorticité proche de la surface. . . . .	170
5.11	Évolution temporelle de la convection. . . . .	171
5.12	Rotation différentielle atteinte dans la zone convective. . . . .	173
5.13	Projection de Mollweide de la fluctuation de température. . . . .	174
5.14	Circulation méridienne pour les 4 étoiles dont la taille relative a été respectée. . . . .	175
6.1	Espace couvert (en masse et taux de rotation) par les différentes simulations 3D existantes à ce jour. . . . .	194
6.2	Profil et amplitude de la viscosité. . . . .	197
6.3	Profil radial des variables thermodynamiques (densité, température, pression). . . . .	197
6.4	Profil radial du gradient d'entropie. . . . .	198
6.5	Balance des flux d'énergie avant et après ajustement de la diffusivité radiative. . . . .	199
6.6	Nombres de Rossby fluide, convectif et stellaire. . . . .	201
6.7	Projection de Mollweide de la vitesse radiale proche de la surface. . . . .	202
6.8	Profil radial des composantes de la vitesse rms. . . . .	203
6.9	Vue méridienne de la vitesse radiale. . . . .	204
6.10	Vue dans le plan de l'équateur de la vitesse radiale. . . . .	205
6.11	Profil de rotation mettant en avant la présence de la tachocline. . . . .	207
6.12	Circulation méridienne. . . . .	209
6.13	Variation de DRKE et de $\Delta\Omega$ en fonction du nombre de Rossby. . . . .	211
6.14	Vue méridienne de la fluctuation de température et de l'entropie. . . . .	213
6.15	Différentiel d'entropie et MCKE en fonction du nombre de Rossby. . . . .	213
6.16	Flux radial et latitudinal du moment cinétique. . . . .	216
6.17	Composantes des termes de l'équation du vent thermique. . . . .	219
6.18	Flux d'enthalpie mettant en avant la zone d'overshoot. . . . .	220
7.1	Simulation du champ magnétique solaire. . . . .	229
7.2	Champ magnétique toroidal organisé dans la zone stable. . . . .	230
7.3	Rubans magnétiques dans les étoiles en rotation rapide. . . . .	231
7.4	Croissance de l'énergie magnétique. . . . .	233
7.5	$B_\phi$ dans le régime transitoire. . . . .	234
B.1	Maillage du code 2D STELEM . . . . .	276
C.1	Domaine de résolution du code 3D ASH. . . . .	281



---

## Liste des tableaux

---

1.1	Synthèse des caractéristiques associées à chaque type spectral. . . . .	36
1.2	Noms des cycles et périodes caractéristiques de la l'évolution du champ magnétique solaire. . . . .	50
1.3	Notions abordées dans les chapitres de ce manuscrit. . . . .	52
2.1	Conditions nécessaires à l'approximation fluide en présence de champ magnétique. . . . .	62
2.2	Valeurs caractéristiques des processus physiques dans la zone convective solaire. . . . .	77
3.1	Résumé des paramètres utilisés des simulations. . . . .	97
3.2	Dépendance de la période du cycle magnétique à l'amplitude des processus advectifs (circulation méridienne et pompage turbulent). . . . .	101
5.1	Propriétés globales des étoiles simulées. . . . .	159
5.2	Paramètres de simulations des 4 modèles. . . . .	162
5.3	Caractéristiques de la convection atteinte dans les 4 étoiles modélisées. . . . .	171
6.1	Synthèse des domaines de résolution couverts par la série de simulations. . . . .	195
6.2	Paramètres de génération d'énergie et de viscosité pour chaque modèle. . . . .	196
6.3	Nombres sans dimension caractérisant l'écoulement des 12 modèles. . . . .	200
6.4	Composantes de l'énergie cinétique et différentiel caractéristique de la température, l'entropie et du taux de rotation. . . . .	211
6.5	Caractéristiques de la zone d'overshoot. . . . .	221
A.1	Définition des symboles utilisées dans la Table A.2. . . . .	268
A.2	Définitions des nombres sans dimension. . . . .	269
A.3	Valeurs typiques de quelques nombres sans dimension dans la zone convective solaire. . . . .	269



Première partie

# Anatomie et métabolisme des étoiles



## Processus physiques à l'œuvre au sein des étoiles

### Contents

<b>1.1</b>	<b>Que les lumières soient au firmament du ciel</b>	<b>27</b>
<b>1.2</b>	<b>Variété des populations stellaires</b>	<b>30</b>
1.2.1	Naissance des étoiles	31
1.2.2	Phase principale	33
1.2.3	Évolution post-séquence principale	33
1.2.4	Classification des étoiles	35
<b>1.3</b>	<b>Structure interne des étoiles de type solaire (G &amp; K)</b>	<b>37</b>
<b>1.4</b>	<b>Convection et turbulence</b>	<b>39</b>
<b>1.5</b>	<b>Rotation des étoiles</b>	<b>42</b>
<b>1.6</b>	<b>Activité magnétique</b>	<b>44</b>
1.6.1	Champ magnétique à la surface du Soleil	45
1.6.2	Propriétés globales du champ magnétique dans les étoiles de faible masse	47
1.6.3	Les cycles magnétiques	48

Ce chapitre décrit le contexte astrophysique dans lequel se développent mes travaux de thèse. Après un rappel historique de la physique stellaire, nous énumérerons les principales phases de la vie d'une étoile, de sa formation jusqu'à sa mort. Puis, une fois dressé le tableau des différentes catégories d'étoiles, nous nous concentrerons sur les propriétés d'une classe particulière, très similaire au Soleil, dite de type solaire. Nous décrirons alors plus en détails leur structure et dynamique interne, en nous attardant sur la convection, la rotation et surtout le magnétisme. En menant une comparaison systématique avec le Soleil, nous pourrions dégager les tendances de ces phénomènes physiques en fonction en particulier de la masse des étoiles et de leur taux de rotation.

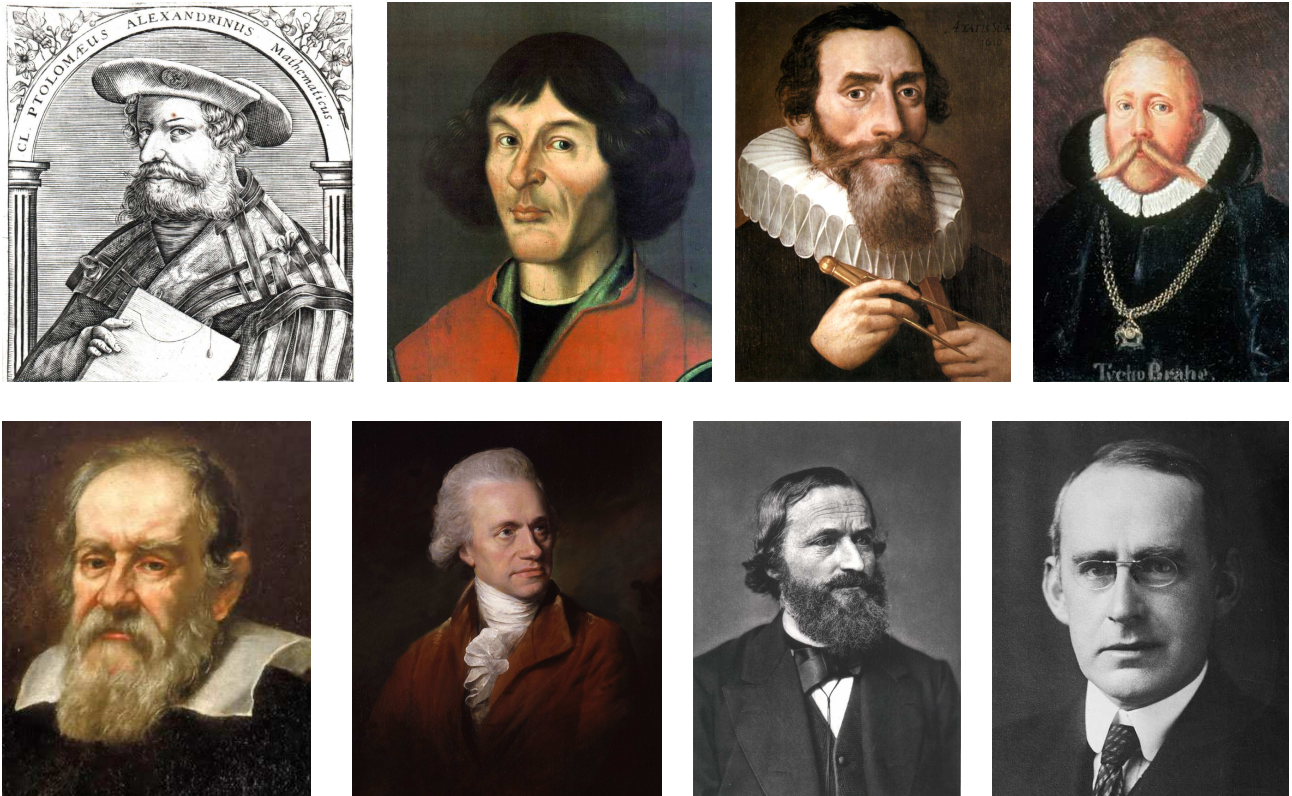
### 1.1 Que les lumières soient au firmament du ciel

Bien avant l'apparition de l'écriture ou de la démarche scientifique, les étoiles ont joué un rôle fondamental dans les sociétés. Elles ont été rapidement regroupées en constellations<sup>1</sup> auxquelles on attribua des noms selon la forme que prenaient ces regroupements. Ces dessins, noms et mythes associés

1. On pense que ce sont les Babyloniens et Sumériens qui ont en premier inventés les constellations vers le XII<sup>e</sup> siècle av. J.-C.. Puis, les Grecs et les Egyptiens se les sont appropriées.



diffèrent d'une culture à une autre, bien que les plus lumineuses soient plutôt similaires comme la Grande Ourse ou Orion<sup>2</sup>. Ils avaient pour but de fournir un moyen mnémotechnique pour se rappeler de la position des étoiles. C'est ainsi que les populations pouvaient se repérer dans le temps (surtout dans les régions où la différence entre les saisons est faible comme à l'équateur). Les navigateurs se servaient également des étoiles pour se diriger grâce à des instruments comme l'astrolabe ou le sextant. Ce dernier (inventé par le mathématicien Anglais John Hadley dans les années 1730) a d'ailleurs apporté un avantage considérable dans l'expansion navale de l'Empire Britannique.



**FIGURE 1.1** – Portraits de quelques physiciens et astronomes ayant contribué à la physique stellaire : Ptolémée, Copernic, Kepler, Brahe, Galilée, Herschel, Kirchhoff et Eddington (*dans le sens de lecture*).

A première vue, les étoiles semblent être des points fixes dans le ciel. On les distingua rapidement des planètes<sup>3</sup> qui elles bougent dans le ciel. Au II<sup>e</sup> siècle av. J.-C., l'astronome Grec Hipparque créa la première carte détaillée de la voûte céleste. Claude Ptolémée utilisa ces travaux et publia vers 130 av. J.-C. dans l'*Almageste* la somme des connaissances les plus avancées en mathématiques et astronomie de l'Antiquité, traité qui restera une référence pendant près d'un millénaire. Il y décrit entre autres un système qui reproduit le mouvement des planètes dans un modèle géocentrique, le système de Ptolémée. Les étoiles ne sont alors que des points brillants relégués sur une sphère d'arrière plan. L'idée qu'elles pourraient être des sœurs du Soleil n'était pas considérée. Alors que les méthodes de mesures s'amélioraient, il fallait complexifier le système de Ptolémée pour continuer de rendre compte des observations, rendant ce système de plus en plus difficile à justifier.

Le coup d'estoc fut porté vers la fin du XVI<sup>e</sup> siècle lorsque l'astronome Polonais Nicolas Copernic proposa<sup>4</sup> dans un modèle beaucoup plus simple que la Terre orbitait en fait autour du Soleil dans un

2. Les cartes des constellations vues par différentes cultures peuvent être vues sur <http://www.radicalcartography.net/>.

3. "astre errant" en grec.

4. Il faut noter que cette idée n'était pas entièrement inédite. Près de deux millénaires plus tôt, Aristarque de Samos

livre qui fut publié seulement l'année de sa mort<sup>5</sup>. Cette idée d'héliocentrisme fut raffiné en 1617 par l'astronome Allemand Johannes Kepler qui utilisa les observations riches et détaillées du Danois Tycho Brahe pour établir notamment les 3 lois fondamentales qui décrivent le mouvement des planètes. Au même moment, le physicien Italien Galilée fut le premier à utiliser la lunette astronomique qui lui révéla la multitude d'étoiles qui peuplent le ciel. La révolution copernicienne est en marche, avec l'idée que certaines de ces étoiles peuvent abriter des planètes similaires à la Terre. Malgré tout, l'Église résiste à l'idée de cette pluralité des mondes et n'hésite pas à brûler vif pour hérésie ceux qui la proclament comme le philosophe Giordano Bruno. Ce dernier incita alors Galilée à la prudence vis à vis de ses travaux.

Jusque là et pour tous, les étoiles restaient des petits points fixes dans le ciel. Seuls de très rares événements venaient perturber l'immuabilité céleste, apparaissant soudainement puis disparaissant après un certain temps. En 1054, les Chinois et Japonais ont reporté une étoile si brillante qu'elle était visible de jour et créait des ombres la nuit pendant près de deux ans. Un autre événement du même type apparut en novembre 1572, et fut observé par Tycho Brahe qui reporta cette nouvelle étoile plus brillante que Vénus dans le livre *De Nova Stella* (qui signifie "d'une nouvelle étoile"). Depuis, de telles "nouvelles étoiles" furent désignées "novæ". Bientôt, William Herschel perturba à nouveau cette vision aristotélicienne en cataloguant les étoiles doubles<sup>6</sup>. Il pensa au début qu'il ne s'agissait que d'une coïncidence de deux étoiles proches le long de la visée, mais leur multitude ne pouvait pas être accidentelle. L'existence des étoiles doubles fut confirmé par un jeune astronome Anglais, John Goodricke. Ce dernier constate en plus que certaines de ces étoiles ont une luminosité variable périodique, la plus connue étant Algol (aussi connue sous le nom de  $\beta$  Persei) dont la période est de 69 heures. Ce fut malheureusement sa seule contribution à l'astronomie puisqu'il mourut à l'âge de 21 ans. Les étoiles ne sont désormais plus seulement des points fixes sur une sphère distante, mais des objets variés, variables, mouvants et parfois éphémères.

Au cours du XIX<sup>e</sup> siècle, les astronomes ont continué à améliorer leurs techniques de mesure et notamment les mesures de distance grâce à la technique de parallaxe<sup>7</sup>. En particulier, l'Allemand Friedrich Wilhelm Bessel montra que l'étoile la plus brillante du ciel, Sirius dans la constellation du Grand Chien, avait un mouvement oscillant, comme s'il orbitait autour d'une autre étoile en apparence invisible. Il spécula alors sur l'existence d'un "compagnon caché" invisible aux instruments de l'époque. C'est en 1862 que l'astronome Américain Alvan Graham Clark découvrit cet astre minuscule et très peu lumineux que l'on appellera Sirius B. Ce fut la découverte de l'une des premières naines blanches, des astres très petits (de l'ordre de la taille de la Terre) mais qui ont une masse comparable à la masse du Soleil.

Jusqu'à la moitié du XIX<sup>e</sup> siècle, les astronomes n'avaient accès qu'à la lumière intégrée des étoiles. Ils pouvaient ainsi mesurer leur luminosité, couleur et parfois leur position avec une précision croissante, mais pas davantage. C'est environ au même moment que la découverte de Sirius B, que l'astronomie stellaire connut un tournant : la découverte de la spectroscopie et l'utilisation de la photographie à des fins astronomiques<sup>8</sup>. En 1814, le physicien Allemand Joseph von Fraunhofer mit en avant la présence de lignes noires dans le spectre solaire. Ces raies d'absorption étaient déjà connues, mais il fut le premier à montrer que leur position était fixe d'un spectre à l'autre. La signification exacte de ces raies ne fut comprise qu'en 1859 lorsque Robert Kirchhoff et Robert Bunsen ont observé des raies d'émission à partir de vapeur de différents éléments. La mise en correspondance de ces deux observations fut déterminante. Les lignes d'absorption du spectre solaire fournissaient en fait la composition chimique du

---

avait déjà eu cette idée, mais était malheureusement bien trop avancé pour son époque.

5. Au XVI<sup>e</sup> siècle, le géocentrisme était la règle universelle. Il refusa donc de publier ses travaux pour ne pas s'exposer à l'Inquisition, jusqu'à ce que ses amis proches le convainquent finalement de l'imprimer.

6. Il fut souvent assisté par sa soeur Caroline Herschel qui amorça l'introduction des femmes en astronomie.

7. Au cours d'une demi-révolution de la Terre autour du Soleil, la cible dont on veut déterminer la distance (si elle est suffisamment proche) semble se déplacer par rapport à un fond beaucoup plus lointain. La mesure de ce changement de position permet de déterminer la distance de l'objet.

8. La première photo réalisée est une image de 1822 réalisée par le français Nicéphore Niépce.

Soleil, une information que les astronomes pensaient hors de portée de leurs instruments<sup>9</sup>. Grâce à cette découverte, le physicien Allemand Wilhelm Wien montra en 1893 que le maximum de luminosité dans le spectre offrait une information supplémentaire sur les étoiles, leur température. L'arrivée simultanée de la photographie offra aux astronomes un moyen d'une précision inégalée d'enregistrer des images des astres ainsi que leurs spectres. A la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, on commença à classer les étoiles selon leur couleur et spectre<sup>10</sup>. Mais c'est au tout début du XX<sup>e</sup> siècle que les astronomes Danois Ejnar Hertzsprung et Américain Henry Norris Russell ont classé les étoiles dans un diagramme luminosité-température dans lequel elles semblaient appartenir à des groupes précis. Il s'agit du célèbre diagramme de Hertzsprung-Russell (HR) dont on peut voir une représentation moderne dans la [Figure 1.2](#).

Bien que l'on en sait désormais plus sur les étoiles, leur naissance, vie et mort restent un mystère à l'aube du XX<sup>e</sup> siècle. Le problème central était de comprendre quelle était la source d'énergie qui leur permettait de rayonner autant de lumière et chaleur. En 1853, Hermann von Helmholtz proposa que le Soleil tire son énergie de sa propre énergie gravitationnelle, ce qui lui permettrait de vivre pendant 18 millions d'années. Cependant, les relevés géologiques de [Lyell \(1837\)](#) ont montré que la Terre a été formée il y a plusieurs centaines de millions d'années. Ce n'est qu'en 1920 que Sir Arthur Eddington résolut ce problème en proposant la fusion nucléaire comme source d'énergie interne ([Eddington, 1926](#)). C'est alors à la fin des années 30 que Hans Bethe posa les fondements de la production d'énergie dans les étoiles ([Bethe, 1939](#)). Le Soleil a joué un rôle particulier de par sa proximité et a été étudié pour de nombreux aspects comme la granulation, les tâches solaires ou sa couronne ([Lyot, 1939](#)). Enfin, après la guerre, la connaissance théorique sur les étoiles a continué de se développer avec l'arrivée des simulations numériques et des nouveaux satellites et télescopes couvrant l'ensemble du spectre électromagnétique des ondes radios aux rayons  $\gamma$ .

## 1.2 Variété des populations stellaires

Aujourd'hui, on a une bonne compréhension globale des différents types d'étoiles et de leur évolution. On peut représenter cette diversité dans un diagramme HR comme celui présenté dans la [Figure 1.2](#) dans lequel on place un ensemble d'étoiles en fonction de leur luminosité  $L_*$  (taux d'énergie intégrée sur tout le spectre électromagnétique rayonnée par seconde par l'ensemble de la sphère) et de leur température de surface (ou effective<sup>11</sup>)  $T_{\text{eff}}$  qui sont reliées selon la loi de Stefan-Boltzmann :

$$L_* = 4\pi R_*^2 \sigma_{\text{stef}} T_{\text{eff}}^4 \quad (1.1)$$

où  $R_*$  est le rayon de l'étoile et  $\sigma_{\text{stef}}$  est la constante de Stefan. Dans cette représentation, les étoiles se regroupent selon plusieurs catégories : la Séquence Principale (SP), les géantes, les supergéantes et les naines blanches. C'est en abordant la théorie de l'évolution stellaire que l'on peut expliquer la forme de ce diagramme et leurs différents groupes.

### 1.2.1 Naissance des étoiles

Expliquons tout d'abord comment les étoiles se forment. La phase de formation stellaire constitue encore l'un des principaux écueils de l'astrophysique moderne. Entre autres, le taux de formation stellaire (la fraction de gaz transformé en étoiles) et la fonction de masse initiale (spectre de la distribution de masses des étoiles créées) à partir des conditions initiales d'un nuage interstellaire est encore un domaine très actif de recherche (e.g. [Chabrier, 2003](#); [Ballesteros-Paredes et al., 2007](#); [Elmegreen, 2011](#)).

9. Il faudra attendre une autre révolution en physique, la mécanique quantique, pour poser les fondements de la théorie physique sous jacente.

10. La première classification grossière fut effectuée par l'astronome et prêtre Angelo Secchi en 1863.

11. On identifie ici la température de surface à la température qu'aurait un corps noir présentant les mêmes caractéristiques spectrales de température effective  $T_{\text{eff}}$ .

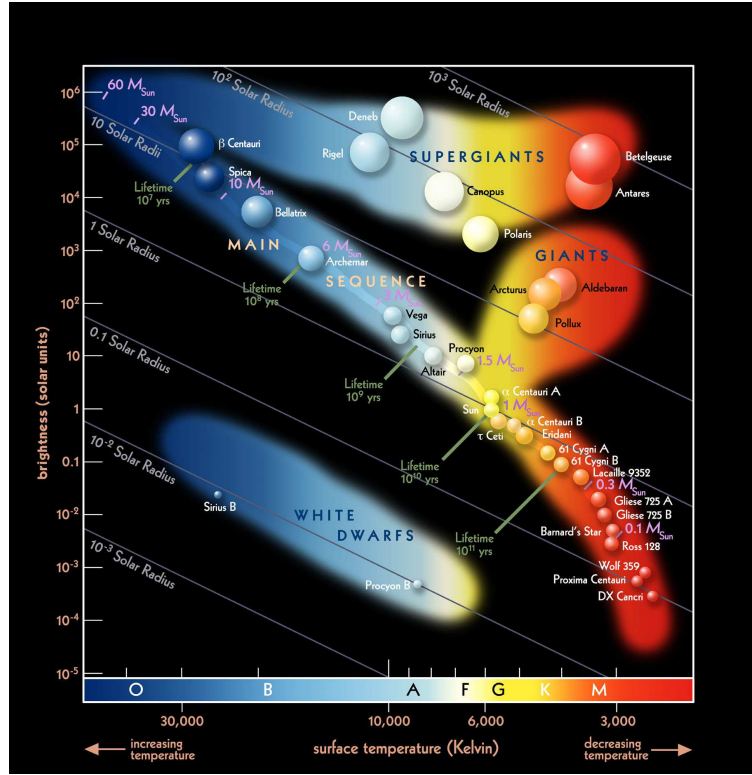


FIGURE 1.2 – Diagramme de Hertzsprung Russel. Crédits : [Bennett et al. \(2003\)](#)

On peut néanmoins dégager les grandes étapes de cette phase (voir la revue de [McKee and Ostriker, 2007](#)).

### Effondrement gravitationnel du nuage interstellaire

Une étoile naît de l'effondrement gravitationnel<sup>12</sup> d'un nuage d'hydrogène moléculaire dont la taille est de l'ordre de quelques dizaines de parsecs (1 parsec = 3.26 années-lumière  $\simeq 10^{16}$  m), la masse de  $\sim 10^5 M_{\odot}$ , la température de 10 – 100 K et la densité de 10 – 300 molécules/cm<sup>3</sup>. Environ 1% de cette masse est sous forme de poussière ce qui rend les nuages très opaques dans le visible. Puis, le nuage se fragmente sur des temps dynamiques (de l'ordre de quelques millions d'années) impliquant divers processus physiques comme la turbulence, le champ magnétique et la rotation. Les nuages se fragmentent jusqu'à atteindre la masse de Jeans<sup>13</sup> qui dépend de leur température et de leur densité.

### Formation de la proto-étoile

La densité croissante du nuage rend le gaz opaque aux infrarouges, ce qui augmente la température et donc la pression. L'effondrement est alors ralenti et le cœur atteint l'équilibre hydrostatique. On parle de proto-étoile. On dit aussi que c'est une source de classe 0. On attribue alors aux phases suivantes une classe I, II, III qui identifie les étapes caractéristiques que l'étoile traverse au cours de sa formation ([Andre et al., 1993](#)).

### Accrétion

La proto-étoile continue tout de même d'accréter le gaz environnant. Cette phase d'accrétion est généralement accompagnée d'une très forte dissipation d'énergie par radiation proportionnelle au taux d'accrétion.

12. Le déclenchement de l'effondrement est une perturbation de l'équilibre hydrostatique initial du nuage due au passage soit d'une onde de choc créée par une supernova voisine, ou par la collision avec un autre nuage.

13. Masse au delà de laquelle un nuage est instable gravitationnellement lorsque la pression interne n'est pas suffisante pour s'opposer à la gravitation.



### Dissociation et ionisation

Jusque là, le gaz se comporte comme un gaz parfait. Mais lorsque la température du cœur atteint finalement  $\sim 2000$  K, l'hydrogène moléculaire s'ionise, ce qui augmente fortement sa capacité calorifique. L'équilibre hydrostatique n'est alors plus maintenu et une seconde phase d'effondrement gravitationnel se déclenche pendant laquelle l'énergie gravitationnelle est absorbée par les molécules dissociées, sans augmentation significative de la température. Lorsque le  $H_2$  est complètement dissocié, la température augmente et l'on retrouve l'équilibre hydrostatique.

### Phase pré-séquence principale

Finalement, l'accrétion s'arrête. La proto-étoile entre alors dans la phase pré-séquence principale pendant laquelle la luminosité est fournie par la contraction gravitationnelle car la température n'est pas encore suffisamment élevée pour amorcer la fusion nucléaire. En vertu du théorème du viriel, la température interne augmente au cours de cette contraction jusqu'à atteindre la température de fusion de l'hydrogène ( $T_c = 10^7$  K). Le déclenchement de la réaction de fusion marque l'entrée de l'étoile dans la séquence principale, on dit alors qu'elle a atteint la *Zero Age Main Sequence* (ZAMS).

Notons que la phase d'effondrement gravitationnel forme une large gamme d'objets dont la masse déterminera son évolution. On distingue alors les naines brunes ( $M_* < 0.07 M_\odot$ ) des étoiles puisque leur température interne n'est pas suffisamment élevée pour enclencher la fusion thermonucléaire. Elles tirent alors leur énergie de la contraction gravitationnelle et ont une masse à peine supérieure à quelque masses joviennes. Les étoiles ont donc une masse supérieure à  $0.07 M_\odot$  mais ne peuvent avoir une masse supérieure à environ  $100 M_\odot$  car la pression de radiation interne devient tellement importante que l'étoile ne peut maintenir sa cohésion (voir la revue de [Zinnecker and Yorke, 2007](#)). Cependant, ces limites dépendent de nombreux paramètres comme les conditions du nuage initial et la métallicité. De fait, elles peuvent varier selon la population d'étoiles à laquelle on s'intéresse :

- Population de type I : étoiles dans le disque galactique et dans les amas ouverts, riches en métaux<sup>14</sup>.
- Population de type II : étoiles dans le halo galactique et dans les amas globulaires, pauvres en métaux.
- Population de type III : première génération d'étoiles formée après le Big Bang, de métallicité nulle.

## 1.2.2 Phase principale

L'étoile est désormais dans sa phase principale (i.e. elle appartient à la Séquence Principale) dans laquelle elle va passer la majorité de sa vie. C'est la raison pour laquelle cet espace du diagramme HR est fortement peuplé. Pendant cette phase, l'étoile contrebalance les pertes radiatives à la surface en brûlant son hydrogène pour former de l'hélium. La durée de cette phase (qui va de quelques dizaines de millions d'années pour les plus massives à plusieurs dizaines de milliards d'années pour les moins massives), les processus physiques mis en jeu et tout le reste de son évolution vont alors dépendre très fortement de sa masse. Cette dernière contrôle entre autres sa luminosité et son rayon selon les relations (1.2) valables pour des masses comprises entre  $0.4$  et  $2.0 M_\odot$  ([Boer and Seggewiss, 2008](#)).

$$R_* \propto M^{0.7} \quad (1.2a)$$

$$L_* \propto M^{3.8} \quad (1.2b)$$

La forte dépendance de la luminosité à la masse traduit le fait que le taux de génération d'énergie doit alors être d'autant plus élevé pour soutenir les forces de gravité, réduisant d'autant plus la durée

14. voir définition de la métallicité dans la Section 1.2.4

de vie de l'étoile. On en déduit que la température interne est une fonction croissante de la masse. Cette génération d'énergie implique une réaction à 4 particules, ce qui est statistiquement peu probable mais dont le résultat net donne 1 atome d'hélium, 2 positrons et 2 neutrinos :

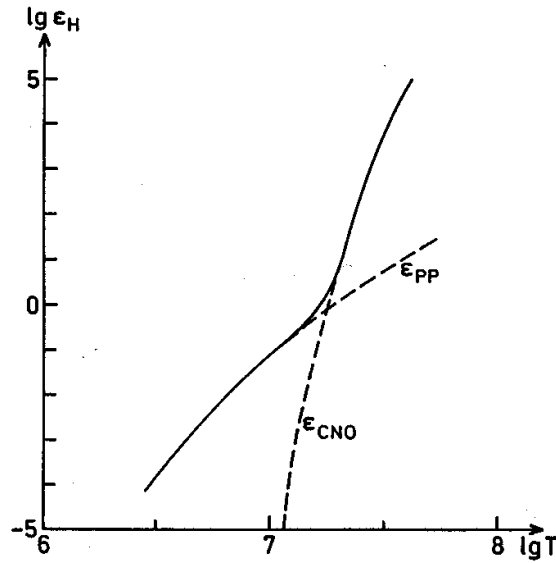


En fait, deux principaux canaux sont possibles : via la chaîne p-p (fusion directe de protons), soit via le cycle CNO (impliquant des éléments lourds). Leur efficacité respective dépend fortement de la température :

$$\epsilon_{\text{pp}} \propto T^4 \quad (1.4a)$$

$$\epsilon_{\text{CNO}} \propto T^{18} \quad (1.4b)$$

C'est la raison pour laquelle c'est la chaîne p-p qui est la plus efficace dans les étoiles de faible masse alors que c'est le cycle CNO qui est dominant dans les étoiles dont la masse est supérieure à  $1.3 M_{\odot}$ . La contribution de chacun des canaux au taux de génération d'énergie totale  $\epsilon_H$  est représenté dans la [Figure 1.3](#).



**FIGURE 1.3** – Taux de génération d'énergie totale  $\epsilon_H$  pour la fusion d'hydrogène en fonction de la température. Les courbes en tirets représentent la contribution de la chaîne p-p et du cycle CNO. Crédits : [Kippenhahn and Weigert \(1994\)](#).

### 1.2.3 Évolution post-séquence principale

Après la séquence principale, les étoiles ont consommé une bonne partie de leur hydrogène. L'étoile est alors composée d'un noyau d'hélium entouré d'une couche encore riche en hydrogène. On distingue alors deux catégories différentes d'étoiles selon leur masse

#### Étoiles de masse faible et intermédiaire ( $M_* < 8 M_{\odot}$ )

À l'issue de la séquence principale, le cœur va se contracter jusqu'à ce que la température soit suffisamment élevée pour entamer la fusion de l'hélium en carbone par le processus triple alpha. L'énergie relâchée par ce nouveau processus de fusion va faire augmenter le rayon de l'étoile d'un facteur compris entre 10 et 100 (selon sa masse) par rapport à sa taille dans sa phase principale.

C'est la phase de géante rouge. Pour les étoiles de masse  $< 3 M_{\odot}$ , la fusion de l'hélium se produit à travers des phases de pulsations thermiques (flashs de l'hélium) alors que pour les masses plus élevées, l'hélium fusionne de manière continue. Dans les deux cas, on se retrouve alors avec un cœur dégénéré composé de carbone<sup>15</sup> que l'on appelle naine blanche autour de laquelle les couches externes ont été éjectées par la pression de radiation, formant une nébuleuse planétaire.

### Étoiles massives ( $M_* > 8 M_{\odot}$ )

La différence majeure est que la masse du cœur est suffisamment élevée pour que le carbone puisse fusionner. Les étoiles dont la masse est supérieure à  $8 M_{\odot}$  peuvent même poursuivre la fusion des éléments jusqu'au fer. Pendant cette phase très courte (de l'ordre de quelques dizaines de millions d'années), elles occupent la phase des supergéantes dans le diagramme HR. Dans les étoiles dont la masse est supérieure à  $\sim 15 M_{\odot}$ , les pertes de masse par vents stellaires deviennent très importantes et influencent fortement leur évolution bien que leurs effets ne soient pas encore complètement compris (voir la revue de [Kudritzki and Puls, 2000](#)). Elles finissent par exploser en supernovæ laissant derrière elles un objet compact : une étoile à neutrons ou un trou noir.

On comprend désormais que les différentes catégories du diagramme HR de la [Figure 1.2](#) sont la manifestation de différents stades d'évolution d'un groupe d'étoiles ayant évolué de manière différentes et plus ou moins rapidement en fonction de leur masse initiale. L'importance relative de chaque groupe n'est donc pas la même en fonction de l'âge de l'ensemble considéré. On peut particulièrement bien voir cet effet dans les amas d'étoiles dans lesquelles les étoiles sont issues d'un même nuage moléculaire progéniteur (cf [Figure 1.4](#)). Elles partagent donc en première approximation le même âge et la même composition chimique initiale<sup>16</sup>, ce qui rend aisé l'interprétation du diagramme HR. Pour les jeunes amas comme Les Pleïades, la séquence principale regroupe quasiment toutes les étoiles et aucune d'entre elles n'a pu encore aborder la phase post-séquence principale. Par contre, dans un amas plus vieux comme M3, les étoiles les plus massives (dont la vie sur la séquence principale est bien plus courte) ont déjà disparues alors qu'un bon nombre d'étoiles de masse intermédiaire sont au stade de géante rouge. Comme les étoiles les moins massives ont une durée de vie de plusieurs dizaines de milliards d'années, l'intégralité de ces étoiles sont encore dans la phase principale, ce qui est le cas de la grande majorité des étoiles (cf distribution de masse dans la [Table 1.1](#)). Cette interprétation suppose cependant que les étoiles sont isolées dans l'espace. On sait pourtant qu'un bon nombre d'entre elles, environ 50%, évoluent en couple ce qui peut modifier leur phase d'évolution et donc compliquer l'interprétation physique (voir la revue de [Tohline, 2002](#)).

La physique stellaire est une discipline encore en pleine évolution et de nombreuses recherches continuent d'être menées dans chacune des phases qui viennent d'être décrites. Il existe de nombreux ouvrages de référence vers lesquels on renvoie le lecteur pour plus de détails : [Clayton \(1968\)](#); [Cox \(1968\)](#); [Kippenhahn and Weigert \(1994\)](#); [Boer and Seggewiss \(2008\)](#).

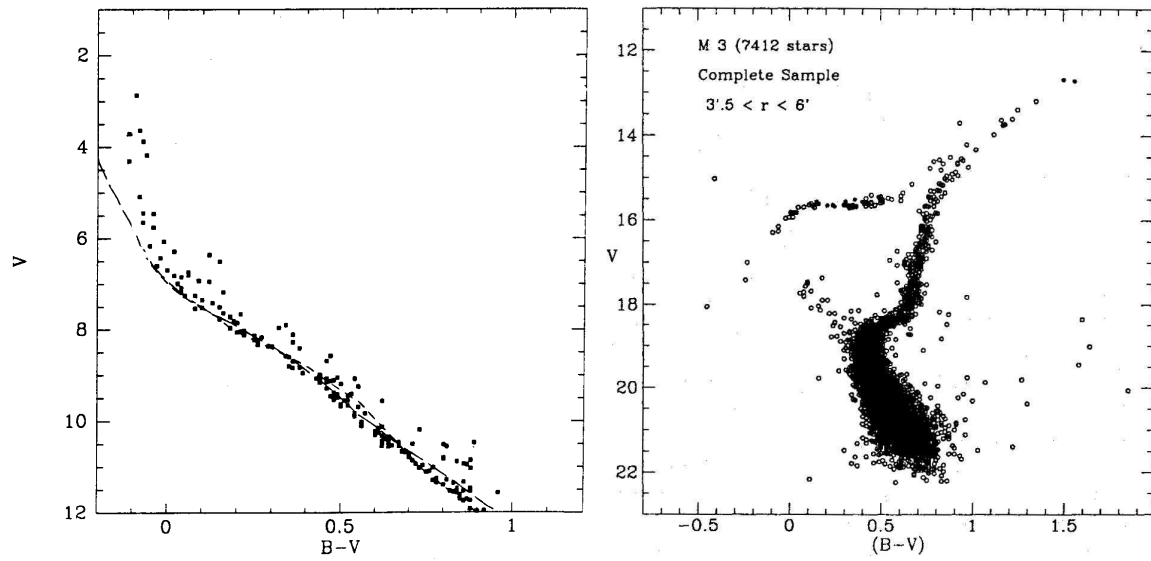
#### 1.2.4 Classification des étoiles

Nous avons vu que les étoiles pouvaient être classées selon leur masse initiale (faible, intermédiaire ou massive) ou selon leur phase d'évolution (SP, géante rouge, naine blanche, étoile à neutrons, trou noir ou supernova). Une nomenclature existe pour les classer, la classification de Harvard, qui les différencie par la présence plus ou moins importante de certaines raies d'absorption. Cette classification par type spectral revient en fait à les classer par température de surface et donc par masse comme indiqué dans la [Table 1.1](#) et la [Figure 1.5](#). La couleur indiquée est alors celle qui correspond à la longueur d'onde  $\lambda_{\max}$  associée à la température effective  $T_{\text{eff}}$  de l'étoile selon la loi de Wien :

$$\lambda_{\max} T_{\text{eff}} = \sigma_w \quad (1.5)$$

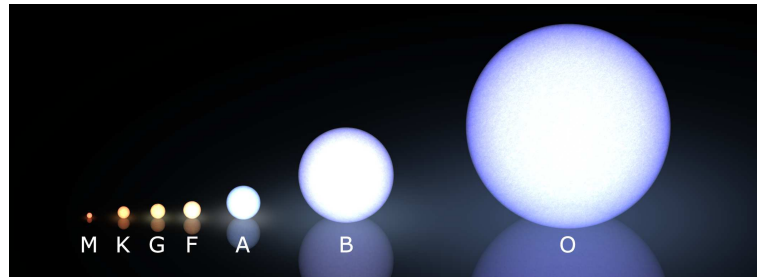
15. mais aussi d'oxygène et d'azote si la masse est suffisamment élevée

16. on parle de modèle à Population Stellaire Simple.



**FIGURE 1.4** – Diagramme Couleur-Magnitude d'un jeune amas ouvert (environ 150 Myrs) M45 (Les Pleïades, *panneau de gauche*) et de l'amas globulaire plus vieux (environ 11 Gyrs) M3 (*à droite*). Crédits : [Kippenhahn and Weigert \(1994\)](#).

où  $\sigma_w$  est la constante de Wien.



**FIGURE 1.5** – Représentation de chaque classe d'étoile à l'échelle et avec leur couleur correspondante.

**TABLE 1.1** – Classification de Harvard donnant les caractéristiques associées à chaque type spectral. La couleur mentionnée est celle correspondant à la longueur d'onde où l'émission est maximale.

Classe	Masse ( $M_{\odot}$ )	$T_{\text{eff}}$ (K)	Luminosité ( $L_{\odot}$ )	Couleur	Fraction des étoiles de la SP (%)
O	$\geq 16$	$> 25000$	$\geq 30000$	bleu	$\sim 0.00003$
B	2.1 - 16	10000-25000	25-30000	bleu-blanc	0.13
A	1.4 - 2.1	7500-10000	5-25	blanc	0.6
F	1.04 - 1.4	6000-7500	1.5-5	jaune-blanc	3
G	0.8 - 1.04	5200-6000	0.6-1.5	jaune	7.6
K	0.45 - 0.8	3500-5200	0.08 - 0.6	orange	12.1
M	$\leq 0.45$	$< 3500$	$\leq 0.08$	rouge	76.45

Chacune de ces classes est en fait subdivisée à l'aide de chiffres, de 0 pour les plus chaudes à 9



pour les plus froides. Puis, pour différencier les différents stades d'évolution et donc dans une première approximation leur âge, on rajoute à leur label une lettre définissant la classe de luminosité :

- 0 : hypergéantes
- I : supergéantes
- II : géantes lumineuses
- III : géantes normales
- IV : sous géantes
- V : naines (séquence principale)
- VI : sous naines
- VII : naines blanches

Selon cette classification, le Soleil est une étoile de type G2V. Notons qu'il existe encore de nombreux autres labels permettant de mettre en avant des caractéristiques particulières des étoiles comme leur variabilité, la présence d'éléments chimiques particuliers etc. mais que nous ne traiterons pas dans ce manuscrit.

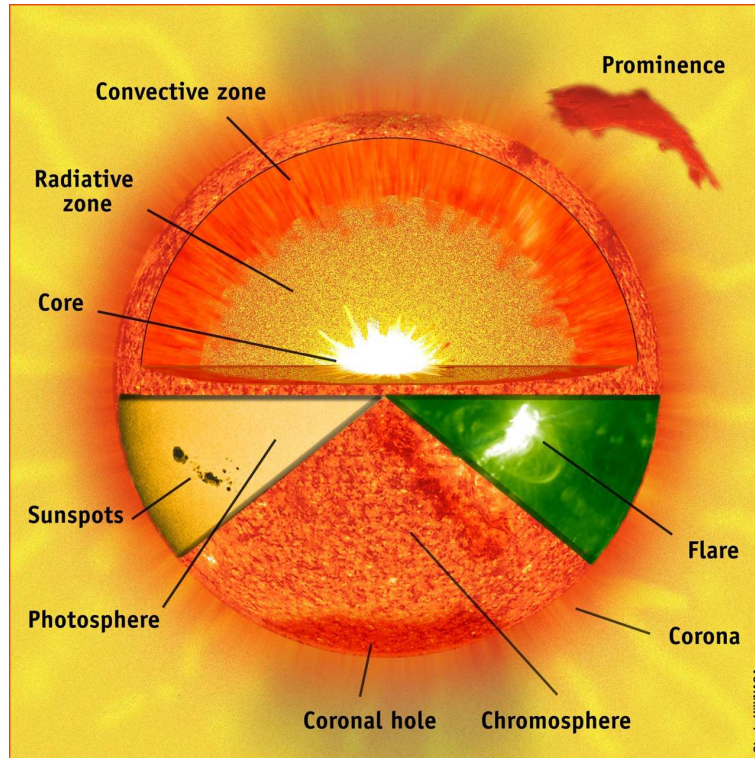
Parfois, les étoiles les plus massives O, B et A sont dites *early type* alors que les autres sont dites *late type*. Cette appellation provient d'une précédente théorie d'évolution stellaire selon laquelle les étoiles sont au début très massives et chaudes puis refroidissent pour devenir plus petites et froides au cours de leur contraction gravitationnelle. Cette évolution se déroule sur des temps de Kelvin-Helmholtz. Avec des valeurs solaires,  $\tau_{KH} \simeq 10^7$  ans. Ce temps est trop court pour expliquer l'âge de la Terre (cf Section 1.1). Cette théorie a donc été depuis abandonnée, même si ces appellations obsolètes (*early type* et *late type*) restent toujours utilisées.

D'autres caractéristiques qui ne sont pas représentées par cette classification sont également importantes, comme la métallicité. Cette dernière définit la fraction d'éléments qui sont plus lourds que l'hydrogène :  $X$  représente la fraction massique d'hydrogène,  $Y$  la fraction d'hélium et  $Z$  la fraction des autres éléments que l'on appelle métaux ; de telle sorte que  $X + Y + Z = 1$ . Pour pouvoir comparer nos travaux aux résultats obtenus pour le Soleil, on supposera dans toute la suite de ce manuscrit que les étoiles ont l'âge du Soleil, i.e.  $(4.566 \pm 0.005) \times 10^9$  ans (Bahcall et al., 1995) et qu'elles ont une métallicité solaire, c'est-à-dire  $X = 0.71$ ,  $Y = 0.27$ ,  $Z = 0.02$  (Asplund et al., 2009).

### 1.3 Structure interne des étoiles de type solaire (G & K)

Dans cette thèse, nous nous intéresserons plus particulièrement aux étoiles dites de type solaire. Ces dernières ont une structure interne similaire à celle qui est montrée sur la Figure 1.6 et ont un type spectral allant de F0 jusqu'à M3. Ce manuscrit se concentrera autour des types spectraux allant de G0 à K9 car ce sont ceux qui sont les plus similaires au Soleil. On supposera que ces étoiles ont le même âge et métallicité que le Soleil. Notons que de par sa proximité, ce dernier a joué un rôle particulier et d'autant plus en évolution stellaire puisque tous les autres modèles sont calibrés par rapport au modèle solaire, dit "modèle standard" (Turck-Chièze et al., 1993; Christensen-Dalsgaard et al., 1996; Brun et al., 2002). Décrivons plus en détails sa structure interne comme cas représentatif des étoiles de type solaire. Dans le Soleil, l'énergie est issue de la fusion thermonucléaire qui se déroule au cœur de l'étoile qui s'étend jusqu'à  $0.25R_{\odot}$ . Elle est transportée du centre vers la surface où elle est rayonnée sous la forme de chaleur et de photons. Le transport dans la première partie de l'étoile est assuré par les photons. Ces derniers, voyageant dans un milieu rempli d'électrons sont constamment absorbés puis réémis sur des distances très courtes et de manière isotrope (le libre parcours moyen  $\ell \sim 1 \text{ cm} \ll R_{\odot}$ ). Ce processus peut alors être identifié à de la diffusion. Il agit dans la zone radiative (ou RZ pour *Radiative Zone*) qui s'étend jusqu'à  $0.713R_{\odot}$ . Cependant, au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre, l'opacité de l'étoile augmente, ce qui inhibe le transport radiatif. Il existe alors un rayon à partir duquel le transport radiatif n'est plus suffisant pour transporter l'énergie vers l'extérieur. Le mécanisme de convection se déclenche alors pour maintenir l'équilibre thermique (voir Section 1.4 pour plus de détails sur la convection). Cette enveloppe est appelée zone convective (ou CZ pour

*Convection Zone*) et englobe la zone comprise entre le haut de la zone radiative et la photosphère, là où la densité est redevenue suffisamment faible pour que les photons puissent à nouveau transporter l'énergie vers l'extérieur des étoiles. Ces caractéristiques globales sont représentées dans la **Figure 1.6**. On rappelle par ailleurs les caractéristiques du Soleil. Sa masse est de  $M_{\odot} = (1.9891 \pm 0.0012) \times 10^{33}$  g et son rayon est  $R_{\odot} = (6.9599 \pm 0.0002) \times 10^{10}$  cm. On en déduit une densité moyenne de  $\rho = 1.408$  g.cm $^{-3}$ . Il a une luminosité de  $L_{\odot} = 3.846 \pm 0.004 \times 10^{33}$  erg.s $^{-1}$ . On calcule alors sa température effective par l'équation (1.1). On en déduit  $T_{\odot} = 5777 \pm 2.5$  K. Toutes les pertes de masse liées au vent solaire sont négligeables pendant la phase principale.



**FIGURE 1.6** – Schéma composite de la structure interne du Soleil. Dans la moitié supérieure on représente les 3 zones principales : le cœur, la zone radiative et la zone convective. Au delà de la photosphère, on trouve la chromosphère puis la couronne solaire qui peut montrer parfois des trous coronaux (principalement aux pôles). On représente également d'autres manifestations de la dynamique stellaire : les protubérances, taches solaires et éruptions. Crédits : NASA.

On pourrait a priori penser que la zone radiative stablement stratifiée (i.e. sans mouvements convectifs) soit une région calme et immobile. Pourtant, elle est sujette à de multiples instabilités hydrodynamiques redistribuant le moment cinétique et la composition chimique, ces instabilités étant dues à la fois à la rotation, au couple exercé à la surface et au cisaillement de la rotation différentielle de la zone convective (Zahn, 1992).

La RZ est de plus constamment traversée par deux types d'ondes générées par les mouvements convectifs : les ondes acoustiques (de fréquence  $0.4 < \nu < 5.7$  mHz) et les ondes de gravité (de fréquence  $\nu < 0.4$  mHz). L'intérieur du Soleil joue alors le rôle de cavité de résonance en piégeant ces deux types d'ondes. Les ondes acoustiques (ou modes p) correspondent à une perturbation de pression longitudinale. Elles sont observées sous la forme d'un spectre discret en fréquence et peuvent traverser l'ensemble de l'intérieur solaire en fonction de leurs modes (les modes les plus faibles peuvent pénétrer jusqu'au cœur alors que les modes les plus élevés restent en surface). Elles se manifestent en faisant osciller l'étoile avec des amplitudes et modes harmoniques caractéristiques. Les ondes de

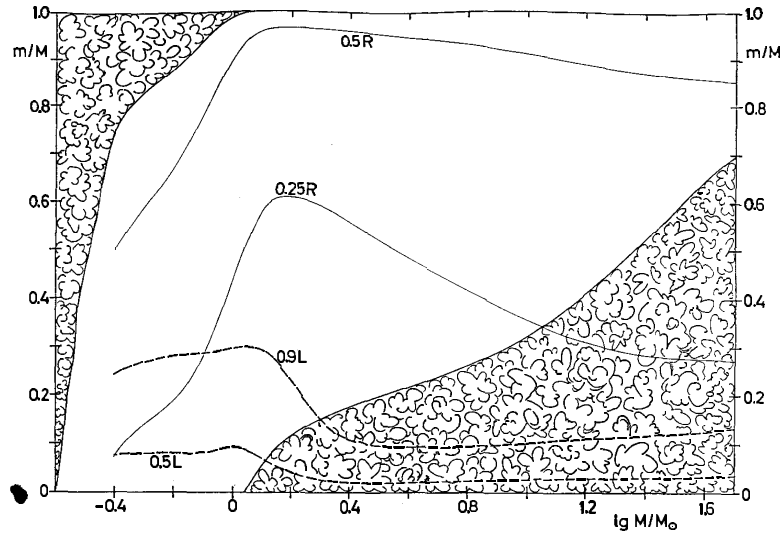
gravité (ou modes  $g$ ) sont elles piégées dans la zone radiative car c'est la gravité (autrement dit la poussée d'Archimède) qui est la force de rappel. Les ondes de gravité ne peuvent donc pas se propager dans la zone convective où justement la stratification est telle qu'une perturbation est instable et n'est pas rappelée vers sa position d'équilibre. Autrement dit, elles s'amortissent de manière évanescence en traversant la zone convective. Les observations des modes  $p$  ont permis de particulièrement bien contraindre la dynamique interne (et notamment le profil de rotation) des étoiles. Les réseaux au sol comme BiSON (Chaplin et al., 1996) et GONG (Harvey et al., 1996) ainsi que les instruments MDI (Scherrer et al., 1995) et GOLF (Gabriel et al., 1995) à bord de la sonde SOHO (Domingo et al., 1995) ont particulièrement contribué à cette nouvelle discipline qu'est l'héliosismologie. L'astérosismologie nous permet de bénéficier de ce type d'analyse pour les autres étoiles dans lesquelles on détecte des oscillations similaires à celles du Soleil. Corot (CONvection, ROTation et Transits planétaires) (Baglin et al., 2006) et Kepler (Borucki et al., 2008) représentent la dernière génération de satellites dotés d'instruments dédiés à la photométrie haute précision. Leur mission principale est de détecter des exoplanètes, mais leur sensibilité permet également de réaliser des mesures d'astérosismologie (Verner et al., 2011). Ces résultats encourageants pourront à terme nous aider à mieux contraindre les modèles des intérieurs stellaires.

La Figure 1.6 montre également d'autres zones caractéristiques au delà de la photosphère qui est la région d'où est émise la lumière. On trouve d'abord la chromosphère dont l'épaisseur est d'environ 2000 km. Elle arbore une couleur rougeâtre due à l'émission d'hydrogène ionisé. Enfin, on a la couronne solaire qui s'étend sur plusieurs millions de kilomètres et s'étend même au delà via le vent solaire (Parker, 1958). La limite de ce dernier définit alors l'héliosphère. Contrairement à la photosphère et à la chromosphère, sa température est extrêmement élevée, de l'ordre du million de degrés. Les mécanismes à l'origine de cette température sont encore mal connus mais semblent impliquer le champ magnétique (voir la revue de Klimchuk, 2006). On pense également que le champ magnétique est à l'origine des tâches solaires, des protubérances (filaments de plasma denses éjectés à la surface du Soleil) et des éruptions solaires donnant lieu parfois à de spectaculaires éjections de masses coronales (ou CME pour *Coronal Mass Ejection*).

Cette structure interne est globalement commune à toutes les étoiles de type F à M3, i.e. avec une zone radiative interne entourée d'une enveloppe convective. Cependant, la taille relative de ces régions diffère d'une masse d'étoile à l'autre. Autrement dit, le rapport d'aspect, mais aussi les profils des variables thermodynamiques sont modifiés (cf Figure 5.5). Dans la gamme de masse que nous explorons, i.e. de  $0.5$  à  $1.1 M_{\odot}$ , la taille relative de la zone convective passe de 44 à 25% et la luminosité varie d'un facteur  $\sim 50$ . Cette différence de flux d'énergie à transporter a une importance cruciale dans la dynamique interne des étoiles comme nous allons le montrer dans le Chapitre 5. Les étoiles dont le type spectral est au delà de M3 ( $M_{*} \leq 0.3 M_{\odot}$ ) ont une région convective qui occupe la totalité de l'étoile. Au contraire, les étoiles plus massives ont une enveloppe radiative qui abrite un cœur convectif. Les étoiles intermédiaires, comme les étoiles A et F, possèdent à la fois un cœur et une surface convective (Richard et al., 2001). La transition entre ces deux régimes coïncide avec la transition entre les deux canaux de fusion de l'hydrogène (chaîne p-p ou cycle CNO) comme on peut le voir sur la Figure 1.7.

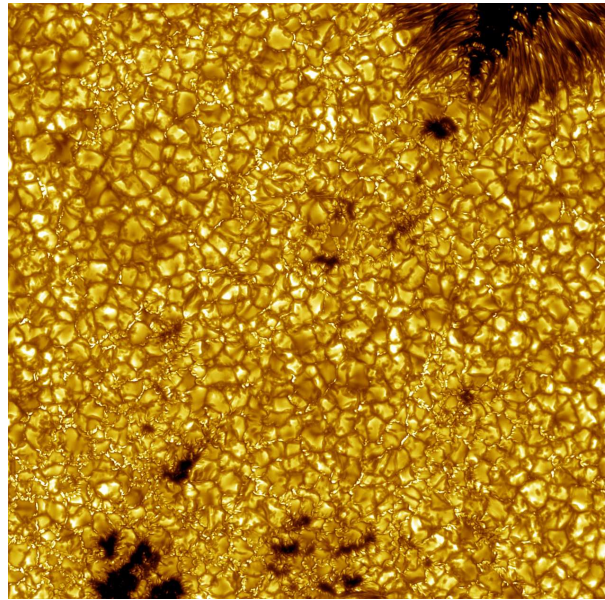
## 1.4 Convection et turbulence

La convection qui existe dans l'enveloppe externe des étoiles de type solaire, comme le Soleil, se manifeste en particulier à la surface où l'on observe la granulation. Cette dernière est constituée de cellules ascendantes larges et chaudes (les granules) entourées d'un réseau étroit de flots descendants froids (l'espace intergranulaire). Le contraste de température entre ces deux zones ( $\Delta T \simeq 1000$  K) explique la différence de luminosité entre les granules lumineux et l'espace intergranule sombre (Puschmann et al., 2005). De telles cellules ont une taille typique de 1000 km et une durée de vie d'une dizaine de minutes. La vitesse typique horizontale et verticale est de l'ordre de  $1 \text{ km.s}^{-1}$ . On peut en



**FIGURE 1.7** – Fraction de masse des zones convective et radiative en fonction de la masse totale de l'étoile. Les régions avec des "tourbillon" matérialisent l'extension de la zone convective. Crédits : [Kippenhahn and Weigert \(1994\)](#).

voir une image dans la [Figure 1.8](#). La granulation a été observée pour la première fois par [Herschel \(1801\)](#) et continue d'être intensément étudiée, en particulier pour comprendre son interaction avec le champ magnétique que ce soit par des observations (e.g. [Solanki et al., 2010](#)) ou des simulations numériques (voir la revue de [Stein, 2012](#)).



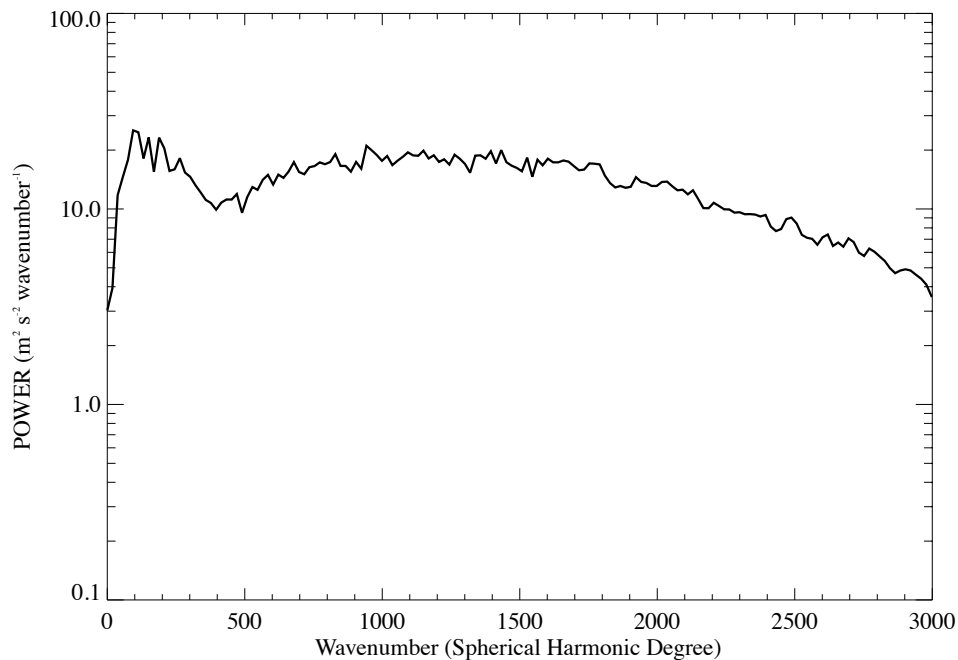
**FIGURE 1.8** – Image de la granulation à la surface du Soleil observé dans la raie du CaII à  $\lambda = 396.37$  nm, au voisinage d'une tache solaire. Crédits : Vasco Henrique, L'Académie Royale des Sciences de Suède.

La granulation n'est pas la seule échelle à laquelle la convection se manifeste. En fait, il existe d'autres gammes d'écoulements à grande échelle qui forment des structures relativement stationnaires et qui ont une durée de vie plus longue. On les a classés traditionnellement en 3 catégories de taille  $\ell$  et durée de vie  $t$  distincts : la mésogranulation ( $\ell \sim 5 - 10$  Mm ;  $t \sim 2$  h), la supergranulation



( $\ell \sim 20 - 50\text{Mm}$ ;  $t \sim 20h$ ) et les cellules géantes ( $> 100\text{ Mm}$ ;  $t > 10$  jours). Ces écoulements grandes échelles résultent de la taille croissante des mouvements convectifs lorsque l'on plonge dans la zone convective<sup>17</sup>, interrogeant sur l'existence réelle d'une telle séparation entre ces différentes structures, et même de l'existence de la mésogranulation (Rieutord et al., 2000; Rieutord and Rincon, 2010). Leur étude est particulièrement complexe puisque les caractéristiques de la supergranulation semblent varier en fonction de l'activité magnétique globale (Meunier et al., 2007a, 2008).

L'amélioration des instruments a joué un rôle majeur dans la compréhension de ces écoulements. On citera entre autres l'instrument MDI à bord de la sonde SOHO, le satellite SDO lancé en 2010 (Schwer et al., 2002), ou encore le satellite Hinode (Otsuji et al., 2007). La sismologie globale a permis de sonder l'intérieur des étoiles (cf Section 1.3), mais il faut avoir recours à d'autres techniques pour avoir une information sur des zones plus localisées. Parmi les techniques d'héliosismologie dites locales (voir la revue de Gizon and Birch, 2005), on peut citer l'analyse temps-distance (Souffrin, 1972; Kosovichev, 1996), l'analyse en anneau (Gough and Toomre, 1983) ou encore l'holographie sismique (Lindsey and Braun, 2000). Grâce à la qualité croissante des données disponibles, il est devenu possible d'observer simultanément différentes échelles spatiales, en particulier l'advection des mésogranules par les mouvements de la supergranulation. C'est ainsi que Muller et al. (1992) ont montré que les mésogranules étaient influencés par l'écoulement des supergranules. De Rosa and Toomre (2004) ont alors mis en évidence l'existence d'une variété d'écoulements de même type dont l'échelle et la durée de vie varient continûment de la granulation à la supergranulation. Cette dernière tient néanmoins une place particulière puisque, à cette taille caractéristique évaluée 30 Mm (Meunier et al., 2007b), le spectre montre un maximum clairement singulier par rapport aux autres échelles (cf Figure 1.9). Plus tard, les simulations numériques de Stein et al. (2006a) ont confirmé l'existence d'écoulements dont le spectre spatial continu était compatible avec les observations (Georgobiani et al., 2007). Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à la revue de Nordlund et al. (2009).



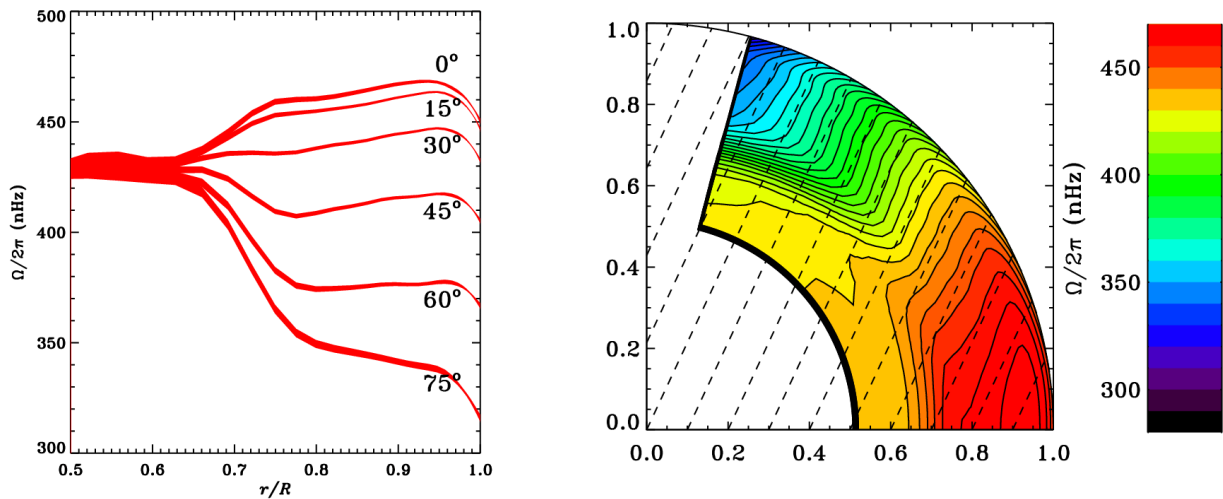
**FIGURE 1.9** – Spectre de puissance de la vitesse Doppler observée par l'instrument MDI. Le maximum associé à la supergranulation est proéminent à  $\ell \sim 120$ , ainsi que celui associé à la granulation en  $\ell \sim 1000$ . Aucune spécificité dans le spectre n'est remarquable concernant la mésogranulation ou les cellules géantes. Crédits : Hathaway et al. (2000).

17. Autrement dit, l'échelle de hauteur augmente avec la profondeur (cf Figure 5.5)

## 1.5 Rotation des étoiles

La rotation peut être un ingrédient important car il influence la dynamique à travers la force centrifuge et la force de Coriolis. Le profil de rotation solaire possède des caractéristiques très particulières que l'on décrit ci après. On se demandera alors dans la Partie III si ces caractéristiques sont génériques à toutes les étoiles de type solaire.

Le Soleil tourne en surface avec une période  $P_{\text{rot}}$  d'environ 28 jours (on définit généralement que la rotation à l'équateur est  $\Omega_{\text{eq}}/2\pi = 456$  nHz), ce qui est plutôt significatif au regard du nombre de Rossby stellaire  $R_{os} = P_{\text{rot}}/\tau \sim 1$  (Kim and Demarque, 1996; Landin et al., 2010) où  $\tau$  est le temps de retournement convectif. L'héliosismologie, grâce à l'analyse des oscillations globales des modes acoustiques à la surface du Soleil, a permis de déduire le profil de rotation interne. Dans la zone convective, le profil de vitesse angulaire aux moyennes latitudes est pratiquement conique, c'est-à-dire qu'il dépend peu du rayon, mais avec une croissance monotone des pôles à l'équateur (d'environ 30%). On pense qu'une telle rotation différentielle est entretenue par le tenseur de Reynolds créé par les mouvements convectifs (Gilman, 1983; Ruediger, 1989; Brun and Toomre, 2002; Miesch et al., 2008). Dans la zone radiative en revanche, la rotation est globalement rigide jusqu'à au moins une profondeur d'environ  $0.2 R_{\odot}$  (Thompson et al., 2003; Couvidat et al., 2003). En dessous de cette limite, il devient difficile de déduire le profil de rotation car les ondes acoustiques ne pénètrent pas aussi profondément. Par contre, les modes de gravité qui eux se propagent dans la zone radiative seraient de bons candidats pour compléter le profil de rotation. Ils sont cependant difficiles à détecter à la surface car ces ondes sont fortement amorties en traversant la zone convective. L'objectif principal de l'instrument GOLF et de SOHO (Gabriel et al., 1995) est de détecter le signal très faible de ces ondes de gravité (García et al., 2007; Eff-Darwich et al., 2008) pour lever les dernières incertitudes qui planent encore aujourd'hui autour de la rotation du cœur du Soleil (Mathur et al., 2008).



**FIGURE 1.10** – *A gauche* : Taux de rotation en fonction du rayon normalisé au rayon solaire  $R_{\odot}$  pour plusieurs latitudes. Les données sont moyennées sur la période 1995-2009, mais l'épaisseur des courbes représentent la barre d'erreur associée à un échantillon de 108 jours. *A droite* : Contours d'isrotation. Les tirets sont des lignes guides inclinées à  $25^{\circ}$  par rapport à l'axe de rotation. Crédits : GONG/NSO/AURA/NSF

La zone radiative est séparée de la zone convective par une fine couche où sévit un fort cisaillement radial (Brown et al., 1989). Cette région singulière, la tachocline, est la zone de transition entre la rotation uniforme de la zone stable et la rotation différentielle de l'enveloppe convective. Spiegel and

Zahn (1992) ont été les premiers à modéliser et à donner un nom à la tachocline et ont montré que cette zone de transition devrait pénétrer profondément dans la zone radiative à cause de la diffusion thermique. Cependant l'héliosismologie montre que son épaisseur est très fine, de l'ordre de  $0.05R_{\odot}$  (Charbonneau et al., 1999), ce qui pose des questions quant à son mécanisme de confinement (Gough and McIntyre, 1998; Strugarek et al., 2011). Cette zone est par ailleurs d'une importance cruciale pour la génération de champ magnétique (cf Section 2.2.3).

Enfin, on note une très fine couche de cisaillement à la surface ( $0.95R_{\odot} < r < R_{\odot}$ ) où le gradient de rotation dans la direction radiale est négatif (Schou et al., 1998). L'existence de cette couche superficielle est généralement attribuée au transport de moment cinétique par la convection dans la photosphère (Foukal and Jokiipii, 1975; Hathaway, 1982). Les simulations numériques sont en mesure de reproduire ce comportement lorsque l'influence de la rotation est faible (De Rosa et al., 2002; Robinson et al., 2003; Augustson et al., 2011), ce qui est le cas dans la photosphère où le temps de retournement convectif est de l'ordre du jour comparé à la période de rotation de 28 jours. Cependant, l'origine exacte de cette couche superficielle n'est pas encore claire puisque Miesch and Hindman (2011) montrent par exemple que d'autres processus comme la circulation méridienne peuvent en influencer le profil.

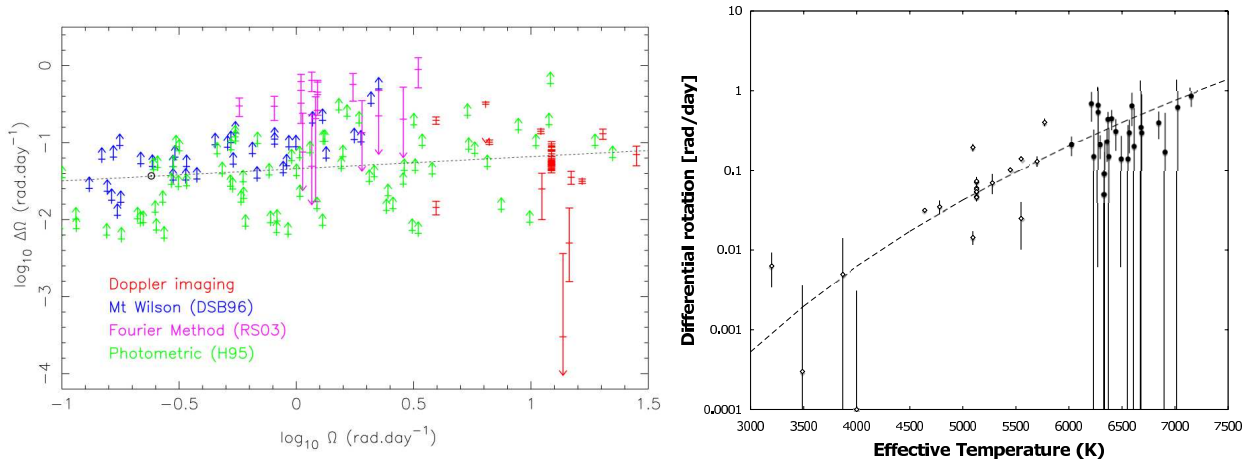
La rotation différentielle latitudinale peut également être détectée à la surface d'autres étoiles grâce à de nombreuses méthodes : analyse de l'élargissement des raies spectrales (Reiners and Schmitt, 2002), astérosismologie (Gizon and Solanki, 2004), suivi de tâches stellaires (Collier Cameron et al., 2002) etc. On peut alors se demander si ces caractéristiques dépendent des paramètres stellaires comme la masse ou le taux de rotation. Pour caractériser cette rotation différentielle  $\Delta\Omega$ , les observateurs définissent généralement la rotation  $\Omega$  en fonction de la latitude  $\theta$  sous la forme

$$\Omega(\theta) = \Omega_{\text{eq}} - \Delta\Omega \sin^2 \theta \quad (1.6)$$

Les travaux de Barnes et al. (2005) et Collier Cameron (2007) (cf Figure 1.11) semblent montrer que  $\Delta\Omega$  dépend fortement de la température effective  $\Delta\Omega \propto T_{\text{eff}}^{8.6}$ , autrement dit de la masse si on suppose que toutes les étoiles de l'échantillon appartiennent à la SP. Si l'on s'intéresse désormais à la variation de  $\Delta\Omega$  en fonction du taux de rotation à l'équateur  $\Omega_{\text{eq}}$ , les observations donnent des résultats ambigus. D'un côté, Donahue et al. (1996) estiment que  $\Delta\Omega \propto \Omega^{0.7}$  en suivant la variation de l'activité magnétique grâce aux raies du Ca II (cf Section 1.6.2). Ils supposent alors que cette variation d'activité magnétique permet de tracer la variation de la période de rotation. L'intervalle de cette dernière permet alors d'évaluer la rotation différentielle. D'un autre côté, Barnes et al. (2005) estiment que  $\Delta\Omega \propto \Omega^{0.15 \pm 0.10}$  grâce à des techniques d'imagerie Doppler (cf Section 1.6.1). Cette technique permet une mesure bien plus directe de la rotation à la surface, contrairement à la méthode précédente. Elle fournirait donc a priori une mesure plus fiable.

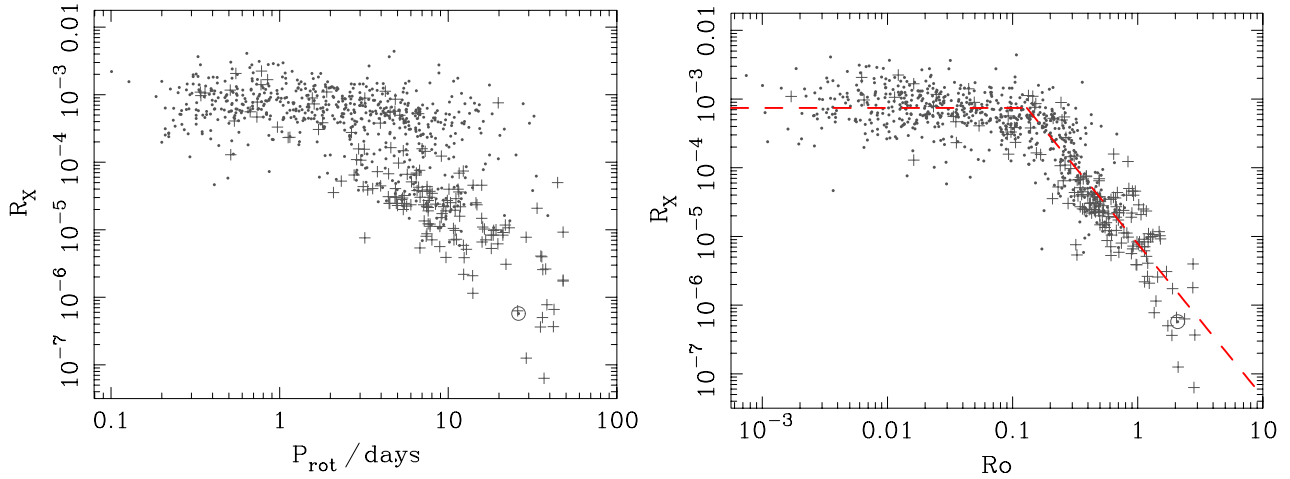
Notons qu'il n'y a aucune raison de penser que le Soleil ait toujours connu une rotation comme celle que l'on observe aujourd'hui. On sait que les étoiles de type solaire connaissent des évolutions de leur moment cinétique au cours de leur évolution, par exemple à cause de jets très puissants pendant leur phase de proto-étoile (Hennebelle and Teyssier, 2008). Pendant leur vie sur la SP, c'est le couple exercé par le champ magnétique de leur vent qui extrait du moment cinétique (Kawaler, 1988; Bouvier, 2009; Matt et al., 2012), ce qui diminue leur vitesse de rotation au cours du temps (Skumanich, 1972). Bien que les observations soutiennent ce scénario (Collier Cameron et al., 2009), la manière exacte dont le champ magnétique extrait le moment cinétique est encore sujette à débat (Matt and Pudritz, 2008; Ud-Doula et al., 2009).

Le ralentissement de l'étoile à cause d'un couple magnétique est un des exemples d'interaction entre la rotation et le champ magnétique. De nombreux efforts ont été menés pour trouver des corrélations entre l'activité magnétique et la rotation depuis les travaux pionniers de Wilson (1966) et Kraft (1967). Walter and Bowyer (1981) et Pallavicini et al. (1981) ont montré qu'il existait une corrélation entre la luminosité en rayons X (noté  $L_X$ ) qui est un traceur de l'activité magnétique (Frazier, 1970), et la période de rotation  $P_{\text{rot}}$ . Ils trouvèrent que l'activité magnétique croît de manière monotone avec le



**FIGURE 1.11** – Rotation différentielle  $\Delta\Omega$  en fonction du taux de rotation équatorial  $\Omega_{\text{eq}}$  (à gauche, crédits : [Barnes et al. \(2005\)](#)) et en fonction de la température effective  $T_{\text{eff}}$  (à droite, Crédits : [Collier Cameron \(2007\)](#)).

taux de rotation jusqu'à une période  $P_{\text{sat}} \simeq 2$  jours. Pour les étoiles en rotation plus rapide, cette loi ne s'applique plus ([Micela et al., 1985](#)) car le rapport  $R_X = L_X/L_{\text{bol}}$  sature à une valeur de  $10^{-3}$  ([Vilhu, 1984](#); [Vilhu and Walter, 1987](#); [Pizzolato et al., 2003](#)). Cette relation est d'autant plus marquée lorsque l'on prend en compte le temps de retournement convectif à travers le nombre de Rossby stellaire  $R_{\text{os}}$  ([Wright et al., 2011](#)), comme on peut le voir sur la [Figure 1.12](#).



**FIGURE 1.12** – Rapport entre la luminosité en X et bolométrique en fonction de la période de rotation (à gauche) et du nombre de Rossby (à droite). Les étoiles binaires sont représentées par le signe +, et le Soleil avec le symbole  $\odot$ . Le meilleur ajustement aux données pour le régime saturé et non saturé est représenté par les lignes en tirets rouges. Crédits : [Wright et al. \(2011\)](#).

## 1.6 Activité magnétique

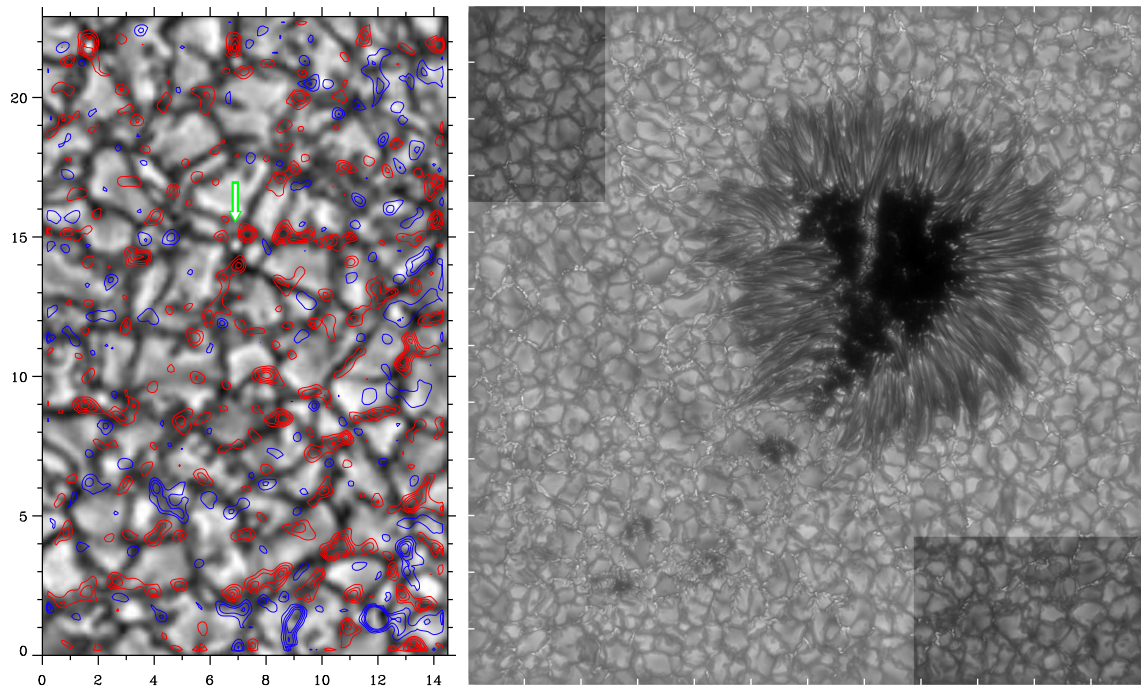
Comme on l'a vu dans la section précédente, le champ magnétique semble jouer un rôle fondamental dans l'évolution à long terme d'une étoile. Sur des échelles de temps plus courtes, le champ magnétique est également capable d'influencer la dynamique. Il est impliqué par exemple dans les éjections de masse coronales, la structure des protubérances, le chauffage de la couronne et est à l'origine du cycle d'activité



(cf Section 1.6.3) et de la modulation de l'irradiation solaire<sup>18</sup>. Le champ magnétique est donc impliqué dans de nombreux aspects de la dynamique solaire. En fait, les observations montrent une activité cyclique régulière aux grandes échelles spatiales mais aussi une activité chaotique à petites échelles, sans aucune relation apparente entre elles. Nous allons décrire ci après les différentes manifestations du champ magnétique à la fois dans le Soleil mais aussi plus généralement dans les étoiles de type solaire. L'origine physique du magnétisme stellaire est discutée dans le Chapitre 2.

### 1.6.1 Champ magnétique à la surface du Soleil

Depuis la première détection de champ magnétique dans le Soleil<sup>19</sup> par Hale (1908), les techniques de détection du champ magnétique se sont grandement améliorées avec par exemple le satellite Hinode (Otsuji et al., 2007). Les magnétogrammes solaires hautes résolutions (e.g. Schrijver and Zwaan, 2000) mettent en avant la présence d'un champ magnétique à petite échelle dont l'énergie est comparable à l'énergie cinétique associée à la convection. L'écoulement divergeant des flots ascendants ont tendance à concentrer le flux magnétique dans l'espace intergranulaire (Thelen and Cattaneo, 2000; Vögler et al., 2005; Stein et al., 2006b) comme on peut le voir sur la Figure 1.13. Ces régions calmes (par opposition aux régions actives que l'on va décrire juste après) exhibent un champ magnétique relativement faible (de l'ordre de la dizaine de Gauss) et constant en moyenne dans le temps.



**FIGURE 1.13** – *A gauche* : image de la granulation sur laquelle est superposée un magnétogramme. L'échelle spatiale est donnée en arcsecondes. Les contours ( $\pm 30, \pm 50, \pm 70, \pm 90$  G) bleus et rouges représentent des polarités opposées du champ magnétique. Crédits : Domínguez Cerdeña et al. (2003). *A droite* : image d'une tache solaire. L'échelle est de 5" par graduation. Crédits : Henriques (2012).

Cette "nappe" de champ magnétique à petites échelles couvre l'ensemble de la surface solaire. En revanche, on trouve localement, des régions dites actives où l'intensité du champ magnétique peut atteindre des valeurs pouvant aller jusqu'à plusieurs kG. Ces régions actives apparaissent puis dispa-

18. Énergie totale incidente sur la Terre.

19. Ce fut d'ailleurs la première application astrophysique de l'effet Zeeman qui a été découverte seulement quelques années plus tôt (Zeeman, 1897).

raissent de manière épisodiques (en fait de manière cyclique, cf Section 1.6.3) dans le temps et sont constituées de régions de champ magnétique de polarité opposée (régions bipolaires). Les zones où l'amplitude du champ magnétique est la plus élevée sont particulièrement remarquables puisqu'elles apparaissent comme des tâches sombres sur la surface du soleil<sup>20</sup>, ce sont les tâches solaires (cf Figure 1.13). On pense que ces régions actives sont dues à l'émergence de tubes de champ magnétique intense créés à la base de la zone convective (cf Section 2.2.3). D'autre part, on remarque qu'elles sont confinées dans deux bandes latitudinales s'étendant de l'équateur jusqu'à environ  $35^\circ$  dans chaque hémisphère. La polarité de ces régions obéit à la loi de Hale (Hale et al., 1919; Hale and Nicholson, 1925) selon laquelle durant un cycle de 11 ans, la polarité de la tâche de tête (la plus à l'Est lorsque l'on regarde le disque solaire) est la même pour toutes les régions bipolaires dans un même hémisphère. Cet ordre de polarité s'inverse à chaque nouveau cycle de 11 ans, la polarité de la tâche de tête du cycle précédent devient alors celle de la tâche de queue. Ces polarités sont constamment en opposition dans l'autre hémisphère.

En plus de ces propriétés d'antisymétrie vis à vis de l'équateur, les observations montrent que statistiquement (Kosovichev and Stenflo, 2008), la droite reliant les deux centres des tâches de polarité opposée (de tête et de queue dans le même hémisphère) forme un angle par rapport à la direction Est-Ouest, c'est la loi de Joy. Cette inclinaison augmente approximativement linéairement avec la latitude d'émergence des tâches solaires : elle est d'environ  $10^\circ$  aux moyennes latitudes et n'est plus que de  $4^\circ$  près de l'équateur (Wang et al., 1989b). On peut enfin noter l'asymétrie entre la tâche de tête qui a tendance à apparaître sous une forme bien définie alors que la tâche de queue a un aspect plus dispersé et fragmenté. Chaque groupe bipolaire est entouré d'une facule (appelé aussi plage faculaire) dont la température est légèrement plus élevée que celle des tâches, ce qui génère une émission thermique chromosphérique accrue.

Évidemment, on retrouve des "tâches" similaires à la surface d'autres étoiles grâce aux techniques d'imagerie Doppler ou à la variation de luminosité (voir la revue de Berdyugina, 2005). Le principe de la première technique est d'utiliser une très haute résolution spectrale sur une raie donnée. La présence d'une tâche déforme alors le profil de la raie au cours de la rotation de l'étoile car elle diminue le flux de photons. Cette technique est extrêmement puissante puisqu'elle permet de déterminer la latitude et la longitude de la tâche stellaire grâce à la forme et à la vitesse de déformation de la raie. En suivant la position de ces tâches au cours du temps, on peut donc remonter à la rotation différentielle à la surface de ces étoiles. Elle n'est cependant applicable qu'aux étoiles en rotation rapide pour que l'effet soit détectable (Vogt and Penrod, 1983; Vogt and Hatzes, 1991). La seconde technique modélise la variation de luminosité au cours du temps d'une étoile en supposant qu'elle est due à la présence d'une (ou plusieurs) tâches stellaires à la surface. À cause de la faible résolution angulaire, elle ne permet alors de déterminer que la surface couverte par ces tâches ainsi que leur position en longitude.

### 1.6.2 Propriétés globales du champ magnétique dans les étoiles de faible masse

Comme l'atteste la présence de tâches stellaires, le champ magnétique n'est pas l'apanage du Soleil. La première découverte de champ magnétique dans les étoiles de faible masse a été faite par Robinson (1980) et Robinson et al. (1980). La plupart des étoiles de type solaire apparaissent également actives magnétiquement (Fuhrmeister and Schmitt, 2003). Plusieurs méthodes existent pour détecter la présence de champ magnétique, bien que ces mesures restent limitées à la surface des étoiles et aux caractéristiques à grandes échelles (voir la revue de Reiners, 2012). Tout d'abord, on peut tracer l'activité magnétique globale par l'émission non thermique générée par des processus de chauffage dus au champ magnétique. En particulier, on utilise l'émission chromosphérique dans les bandes H&K du Calcium (Schrijver et al., 1989) ou l'émission coronale à travers les rayons X (Pevtsov et al., 2003).

20. Le champ magnétique intense qui y règne inhibe le transport convectif (Rempel et al., 2009), ce qui refroidit localement le plasma (voir la revue de Borrero and Ichimoto, 2011, pour une explication détaillée).

Si l'on souhaite en revanche plus de détails<sup>21</sup> sur la topologie du champ magnétique, il faut utiliser des techniques plus directes basées sur l'effet Zeeman dont on peut mesurer à la fois l'amplitude et la polarisation. L'écartement des raies nous donne accès au module du champ magnétique, alors que la polarisation de la lumière nous donne l'orientation du champ magnétique. La méthode désormais la plus aboutie est de combiner un spectrographe avec un polariseur, la spectropolarimétrie, qui permet de mesurer la polarisation sur une large gamme de longueur d'ondes de la radio jusqu'au rayons X (Donati et al., 1997). Cette technique a l'avantage de pouvoir détecter les topologies complexes (autres que de simples configurations dipolaires par exemple contrairement à la photopolarimétrie classique) grâce à l'analyse simultanée d'un grand nombre de raies spectrales. La dernière génération de spectropolarimètre est arrivée récemment : ESPaDOnS au Canada France Hawaii Telescope (CFHT) (Donati, 2003), et NARVAL au Télescope Bernard Lyot (TBL) (Aurière, 2003), tous deux fonctionnant dans le visible ; et permet une surveillance continue de la topologie du champ magnétique pour les étoiles de type M à F.

Pour les étoiles en rotation rapide, on peut bénéficier de l'élargissement des raies dues à la rotation pour avoir une mesure encore plus précise du champ magnétique. Cette technique combine les avantages de la spectropolarimétrie et de l'imagerie Doppler (e.g. Vogt et al., 1987) et est appelée *Zeeman Doppler Imaging* (ZDI) (Semel, 1989; Brown et al., 1991; Donati, 2001). Cette technique peut être utilisée pour les étoiles à rotation faible, mais ne permet alors que de reconstruire les harmoniques sphériques de faibles ordres (Donati et al., 2006). Pour une explication détaillée de l'ensemble des techniques de détection du champ magnétique, le lecteur peut se référer à la revue de Landstreet (1992) ou Donati and Landstreet (2009).

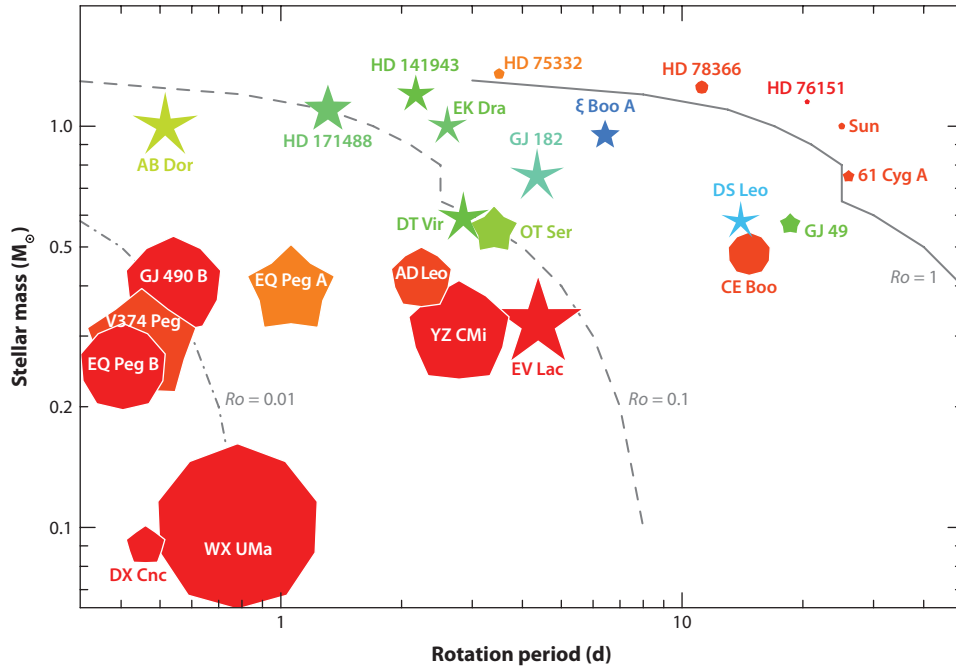
La Figure 1.14 résume graphiquement les principaux résultats obtenus pour identifier comment les paramètres stellaires (masse, rotation) peuvent influencer l'amplitude et la topologie du champ magnétique dans les étoiles non dégénérées (Donati and Landstreet, 2009). Pour des raisons de simplicité, on ne rappelle que les résultats concernant les propriétés élémentaires : l'énergie magnétique  $e$  (intégrée sur la surface), l'importance relative de la composante poloidale  $p$ , et la fraction de la densité d'énergie  $a$  appartenant aux modes axisymétriques. Chaque étoile est représentée dans un diagramme "masse-période de rotation", par un symbole matérialisant les trois caractéristiques énoncées du champ magnétique mesuré à grande échelle :  $e$  (taille),  $p$  (couleur) et  $a$  (forme). On voit alors clairement apparaître une distinction entre trois catégories d'étoiles :

- Les étoiles dont la masse est supérieure à  $0.5 M_{\odot}$  mais dont le nombre de Rossby stellaire  $R_{os}$  est inférieur à l'unité, montrent une composante toroidale dominante, avec une composante poloidale non axisymétrique. Ces étoiles très actives et à rotation rapide montrent une structure toroidale intense à la surface pouvant même prendre la forme d'anneaux encerclant l'étoile à de multiples latitudes Petit et al. (2008); Morgenthaler et al. (2012). (Donati et al., 1992; Donati and Collier Cameron, 1997), contrairement au Soleil où de telles structures sont localisées profondément à la base de la zone convective (BCZ). Les simulations de Brown et al. (2010) et Nelson et al. (2013b) retrouvent des comportements similaires dans les étoiles en rotation rapide.
- Lorsque  $R_o \simeq 1$ , il semble que l'on entre dans un autre régime moins intense où l'on est principalement dominé par la composante poloidale. Le Soleil appartient à cette catégorie.
- Les étoiles dont la masse est inférieure à  $0.5 M_{\odot}$  montrent plutôt une activité magnétique soutenue avec une composante poloidale axisymétrique dominante. Elles ont cependant toutes une rotation rapide, ce qui fait penser que c'est  $R_o$  qui contrôle les caractéristiques du champ magnétique.

### 1.6.3 Les cycles magnétiques

Schwabe (1844) fut le premier à remarquer que le nombre de taches solaires apparaissant à la surface

21. Le niveau de détails est néanmoins restreint à la structure à grande échelle du champ magnétique, même avec l'imagerie 2D.



**FIGURE 1.14** – Propriétés globales du champ magnétique observé dans les étoiles de faible masse, en fonction de la masse de l'étoile et de sa période de rotation. La taille du symbole indique la densité d'énergie magnétique  $e$ , sa couleur indique la configuration du champ magnétique (bleue et rouge étant purement toroïdale et purement poloidale respectivement), et la forme illustre le degré d'asymétrie du champ poloidal (un décagone et une étoile représentant un champ purement axisymétrique et purement non axisymétrique respectivement). Les lignes plein, tiret et mixte représentent un nombre de Rossby stellaire constant égal à 1, 0.1 et 0.01 (utilisant les temps de retournement convectif de Kiraga and Stepien (2007)). Crédits : Donati and Landstreet (2009).

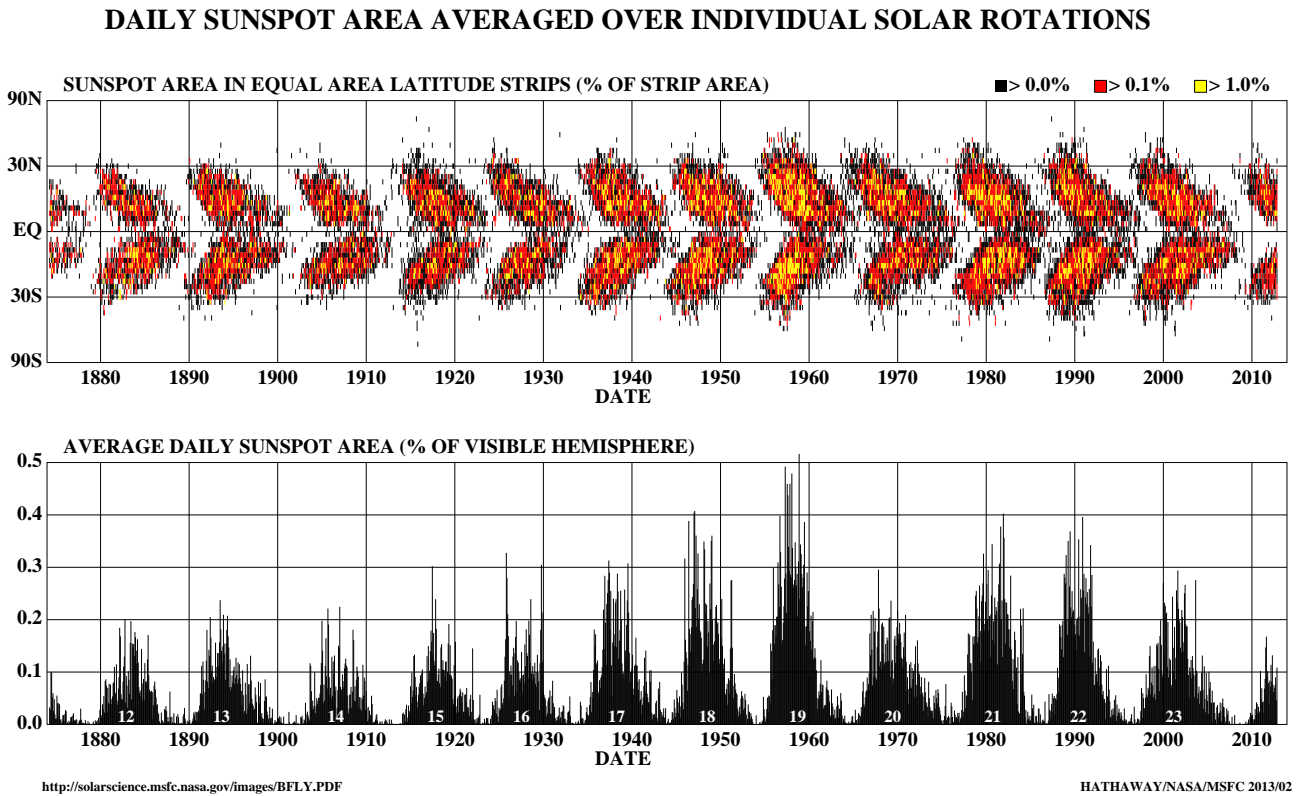
du Soleil était périodique. On peut représenter leur localisation dans un diagramme temps latitude dans lequel on a intégré le long de la longitude. La position des tâches solaires dans ce diagramme rappelle les ailes d'un papillon, c'est la raison pour laquelle on appelle communément la Figure 1.15 un diagramme papillon<sup>22</sup>. Cette représentation est un diagnostic important puisqu'il permet de résumer toutes les caractéristiques d'un cycle solaire (listées ci après) que tout modèle doit pouvoir reproduire.

**Périodicité** : cycle de 11 pour les tâches solaires (Schwabe), cycle magnétique de 22 ans si on prend en compte le renversement de polarité à chaque cycle (Hale), une modulation sur l'amplitude des cycles de 90-100 ans (Gleissberg), existence de minima d'activité (Wolf, Spörer, Maunder, Dalton<sup>23</sup>) se produisant de manière irrégulière (Usoskin et al., 2007). On résume ces différents cycles dans la Table 1.2 bien que la durée exacte et l'amplitude de ces périodes varient d'un cycle à l'autre. Par exemple, le cycle de Schwabe peut varier entre 18 et 25 ans (Weiss, 1990; Beer et al., 1998; Usoskin et al., 2007). Dans toute la suite de ce manuscrit, on s'efforcera de distinguer les cycles *magnétiques* (de 22 ans) des cycles *d'activité* (de 11 ans) pour éviter toute confusion.

**Migration équatoriale et inclinaison du champ toroïdal** : les régions actives sont restreintes à une bande équatoriale de  $\pm 35^\circ$ . Au cours d'un cycle, la latitude moyenne à laquelle les régions actives apparaissent à la surface est de plus en plus proche de l'équateur. D'autre part,

22. On peut suivre mensuellement l'évolution du diagramme papillon à <http://solarscience.msfc.nasa.gov/SunspotCycle.shtml>

23. Notons que ce minimum n'est pas aussi intense que les trois autres comme on peut le voir sur la Figure 1.17



**FIGURE 1.15** – *Panneau supérieur* : Diagramme temps latitude (dit diagramme papillon) dans lequel on représente la position d’apparition des tâches solaires intégré le long de la longitude. La couleur représente la surface qu’occupe les tâches solaires. *Panneau inférieur* : Évolution au cours du temps de la surface totale occupée par les tâches solaires au cours du temps. Les numéros en blancs correspondent à la numérotation attribuée à chaque cycle depuis leur détection. Nous sommes à ce jour au milieu du cycle 24. Crédits : NASA.

**TABLE 1.2** – Récapitulatif des différents cycles et périodes caractéristiques de l’évolution du champ magnétique solaire.

Nom d’une période caractéristique	Période
Cycle de Schwabe	11 ans
Cycle de Hale	22 ans
Cycle de Gleissberg	90-100 ans
Minimum de Wolf	1280-1350
Minimum de Spörer	1420-1540
Minimum de Maunder	1645-1715
Minimum de Dalton	1795-1825

elles suivent la loi de Hale et de Joy (cf Section 1.6.1).

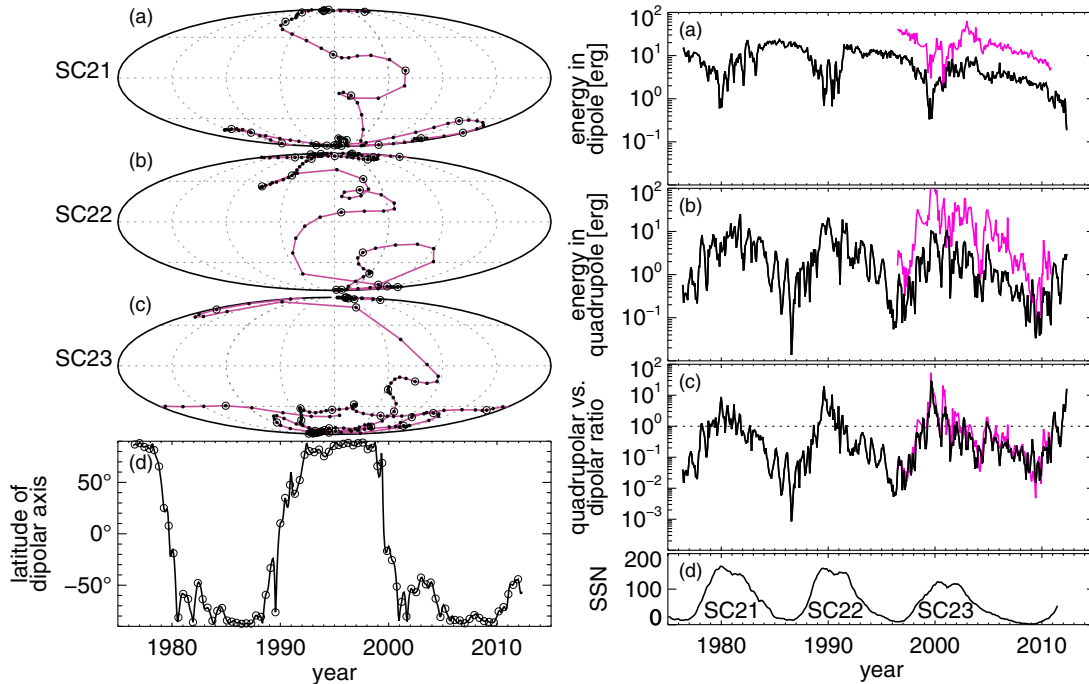
**Migration polaire du champ poloidal** : le champ poloidal de surface migre des moyennes latitudes aux pôles au cours d’un cycle (e.g. Wang et al., 1989a; Benevolenskaya, 2004).

**Déphasage** : différence de phase de  $\pi/2$  entre le champ poloidal de surface aux pôles et le champ toroidal en profondeur, de telle sorte que le champ polaire change de signe ( $- \rightarrow +$ ) lorsque le champ toroidal est maximal (+).



**Amplitude du champ magnétique** : le champ toroidal à la surface peut atteindre plusieurs kG dans les tâches solaires, alors qu'il n'est que d'une dizaine de gauss dans les régions non actives. Le champ poloidal a lui une amplitude d'environ 10 G.

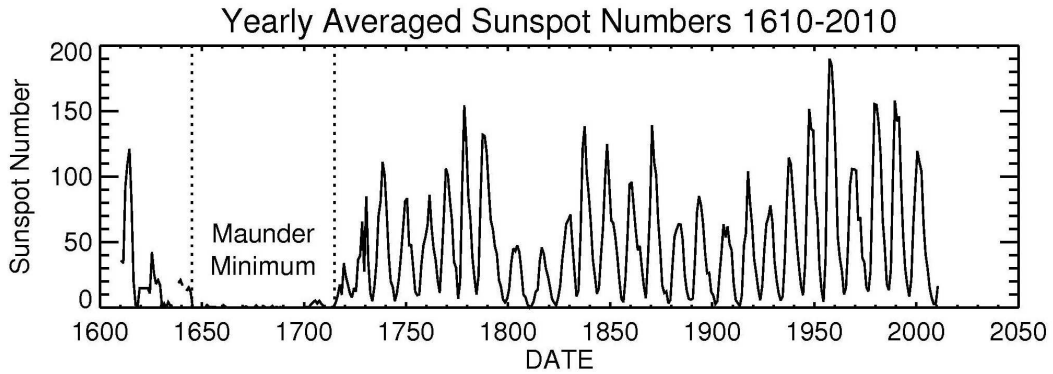
**Polarité** : la polarité du champ magnétique solaire à grande échelle est principalement dipolaire (antisymétrique par rapport à l'équateur) surtout pendant les phases de minimum d'activité (Hoeksema, 1984). Le flux est alors maximal aux hautes latitudes solaires où elles ont une polarité opposée qui s'inverse à chaque cycle d'activité. C'est lorsque l'activité magnétique est à son paroxysme (i.e. le nombre de tâches solaires est maximal) que le dipôle subit un renversement. Pendant cette période, l'axe du dipôle est alors localisé dans des régions proches de l'équateur pendant 12-18 mois, résultant en une réduction de l'énergie contenue dans les modes dipolaires. Au contraire, l'énergie des modes quadrupolaires (symétrique par rapport à l'équateur) est beaucoup plus fluctuante et en opposition de phase avec l'énergie des modes dipolaires. L'ensemble de ces comportements sont visibles dans la Figure 1.16 et ont été contraints par les simulations numériques (Dikpati and Gilman, 2007a; Hotta and Yokoyama, 2010a; De Rosa et al., 2012).



**FIGURE 1.16** – La numérotation des cycles (SC pour *Solar Cycle*) est la même que dans la Figure 1.15. *A gauche* : de (a) à (c) Projections de Mollweide de la position de l'axe du dipôle magnétique pour les cycles solaires 21 à 23. Les cercles indiquent la longitude et latitude de l'axe du dipôle tous les 6 mois (un point représente la position à chaque mois). Les lignes en tirets sont placées toutes les  $45^\circ$  en longitude et latitude à titre indicatif. Le méridien de référence est différent pour chaque cycle montré pour mieux mettre en avant le renversement de polarité. Le panneau (d) montre la latitude de l'axe du dipôle en fonction du temps, dans lequel les cercles correspondent aux points des panneaux (a) à (c). *A droite* : Énergie totale contenue dans (a) les modes dipolaires, (b) les modes quadrupolaires et (c) dans le rapport entre les deux pour les données Wilcox Solar Observatory (en noir) et MDI (en magenta). Le panneau (d) montre le nombre de tâches solaires moyenné par mois. Crédits : De Rosa et al. (2012).

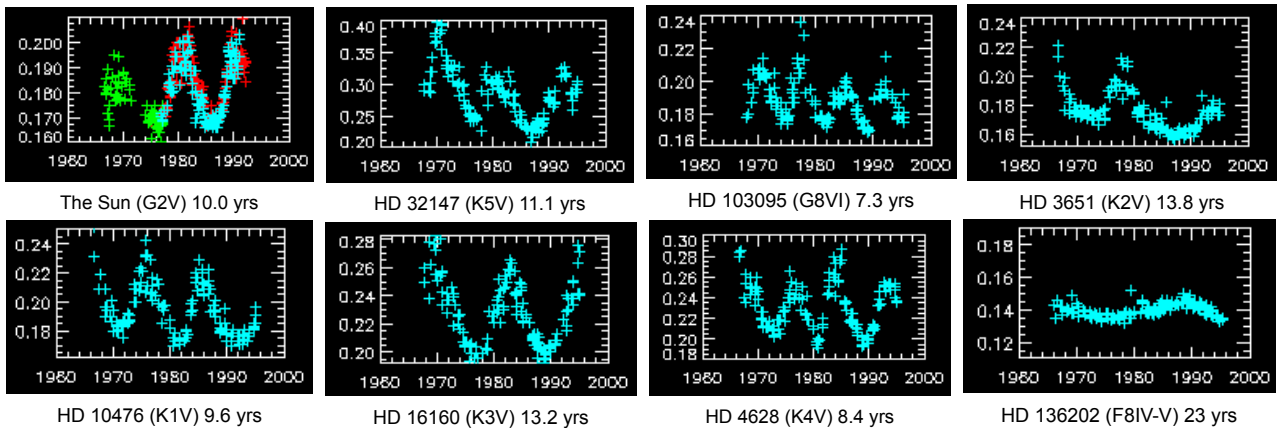
Comme le suivi des tâches solaires a été fait par différents observateurs, Hoyt and Schatten (1998)

ont rassemblé l'ensemble des données observables<sup>24</sup> jusqu'en 1610 (voir aussi Svalgaard, 2010) en utilisant en particulier les relevés de Wolf (1861). Leurs données, résumées sur la Figure 1.17, mettent en avant l'existence d'une période très particulière déjà reportée par Spoerer (1890) pendant laquelle les tâches solaires étaient quasi-inexistantes et dont l'origine est toujours en débat (cf Chapitre 4). Ces phases d'activité réduites sont susceptibles d'avoir fortement influencé le climat terrestre (Nesme-Ribes et al., 1993; Eddy, 2005). Pour une discussion détaillée sur les cycles solaires, le lecteur peut se référer à la revue de Hathaway (2010).



**FIGURE 1.17** – Évolution du nombre de tâches solaires observés entre 1610 et 2010 mettant en avant le minimum de Maunder entre 1645 et 1715. Crédits : NASA.

On retrouve des cycles magnétiques similaires dans les étoiles de type solaire (cf Figure 1.18). Leur étude a débuté grâce à la surveillance continue de la raie CaII dans la bande H et K à l'observatoire du Mont Wilson (Wilson, 1978). Différentes revues reportent la progression des observations (Baliunas et al., 1995; Saar and Brandenburg, 1999; Giampapa, 2005, 2012). La caractérisation des cycles magnétiques stellaires est discutée dans le Chapitre 3.



**FIGURE 1.18** – Activité chromosphérique traçant l'activité magnétique au cours du temps pour un échantillon d'étoiles observées dans le programme HK au Mont Wilson, mettant en avant la similarité avec le Soleil (*premier panneau*). La période du cycle observé est reportée à droite du nom de l'étoile. Crédits : <http://www.mtwilson.edu/hk/Cycles/>

24. Notons que d'autres méthodes existent pour mesurer de manière plus ou moins directe l'activité solaire comme par exemple la mesure de radioisotopes sensibles aux rayons cosmiques (dont le nombre est inversement proportionnel au champ magnétique solaire) dans le tronc des arbres (Stuiver and Quay, 1980) ou dans les relevés de glace en antarctique (Beer et al., 1998).

Nous avons établi ici une description globale de la dynamique et du magnétisme des étoiles de type solaire. Cependant, une description plus détaillée des différents aspects sera abordée dans les chapitres qui leur sont dédiés. On résume dans la [Table 1.3](#) les chapitres auxquels on réfère le lecteur pour trouver des précisions sur les notions qui ont été introduites dans ce chapitre introductif.

**TABLE 1.3** – Tableau de correspondance entre les notions introduites et les autres chapitres de ce manuscrit.

Section introduction	Notions abordées	Chapitre
Section <a href="#">1.6.3</a>	Cycles stellaires	Chapitre <a href="#">3</a>
Section <a href="#">1.6.3</a>	Modulation et parité des cycles	Chapitre <a href="#">4</a>
Section <a href="#">1.4</a>	Convection	Chapitre <a href="#">5</a>
Section <a href="#">1.5</a>	Rotation différentielle	Chapitre <a href="#">6</a>
Section <a href="#">1.6.2</a>	Champ magnétique dynamique	Chapitre <a href="#">7</a>





## Origine du magnétisme stellaire : le concept de dynamo fluide

### Contents

<b>2.1</b>	<b>Dynamique des fluides et plasmas</b>	<b>54</b>
2.1.1	Cas Hydrodynamique	54
2.1.2	Cas Magnétohydrodynamique	61
<b>2.2</b>	<b>Effet Dynamo</b>	<b>63</b>
2.2.1	Généralités sur la dynamo	63
2.2.2	Les différents types de dynamo	65
2.2.3	Mécanismes générateurs de champ magnétiques à grande échelle	68
2.2.4	Équation d'induction en dynamo champ moyen	74
2.2.5	Équations adimensionnées	76
<b>2.3</b>	<b>Les dynamos naturelles et expérimentales</b>	<b>79</b>
2.3.1	Dynamo stellaire	79
2.3.2	Dynamo planétaire	81
2.3.3	Dynamo galactique	82
2.3.4	Dynamos expérimentales	83

Ce chapitre s'intéresse plus particulièrement aux origines du champ magnétique observé dans les étoiles : la dynamo fluide. Nous introduirons tout d'abord les concepts fondamentaux de l'hydrodynamique ainsi que de la magnéto-hydrodynamique. Puis, nous formaliserons le concept et les différents types de dynamo et donnons les conditions sous lesquelles elle opère. C'est en particulier dans cette section que l'on développera l'approche champ moyen. Enfin, nous terminerons ce chapitre en donnant un bref aperçu de la variété des types de dynamo connues dans l'Univers.

Afin de comprendre l'existence et les caractéristiques du champ magnétique observé dans les étoiles, on se doit de comprendre comment il est créé. Dans les étoiles de type solaire, la forte diffusion ohmique de la zone convective, i.e. la diffusion turbulente  $\eta_t \sim 10^{12} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$  (évaluée par la dissipation des régions actives, très grande devant la diffusivité atomique  $\eta_a \sim 10^3 - 10^6 \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ ), aurait dû dissiper le champ magnétique rendant très peu probable sa détection. La présence d'un cycle magnétique avec renversement de polarité exclut la possibilité d'un champ primordial dans la zone radiative qui diffuserait lentement vers la surface. Le fait que l'on observe du champ magnétique dans quasiment toutes les étoiles de ce type montre qu'il est nécessairement régénéré de manière permanente. Le but est alors de comprendre comment ce champ magnétique est créé et quels sont les processus physiques

qui influencent ses propriétés telles que son amplitude et sa topologie. Le consensus actuel qui existe est l'effet dynamo. La dynamo est la capacité qu'a un fluide conducteur d'amplifier et de maintenir un champ magnétique contre la dissipation ohmique. Dans un premier temps, on décrira la dynamique des fluides et plus particulièrement les conditions pour que la turbulence se développe, cette dernière étant un acteur important dans le cas de la dynamo stellaire en zone convective. Puis, on généralisera ces résultats au cas MagnétoHydroDynamique (MHD). Ensuite, on expliquera quels sont les différents types de dynamo qui existent et l'on se concentrera sur la dynamo grande échelle, celle qui nous intéresse dans cette étude. On conclura sur les autres domaines dans lesquels on retrouve également un processus dynamo.

On adoptera la convention dite de sommation d'Einstein dans laquelle on somme sur les indices répétés. Par exemple, le produit scalaire  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  s'écrit  $u_i v_i$ .

## 2.1 Dynamique des fluides et plasmas

Nous allons entrer un peu plus en détails dans les processus physiques qui sont à l'œuvre au sein des étoiles. Ces dernières sont d'immenses sphères de gaz soumis aux lois de l'hydrodynamique (dans le régime classique, i.e. non relativiste). On décrira également la thermodynamique et l'électromagnétisme qui impactent significativement la dynamique.

### 2.1.1 Cas Hydrodynamique

On rappelle ici quelques résultats importants de la dynamique des fluides. Le lecteur peut se référer à de nombreux ouvrages (e.g. [Pope, 2000](#); [Kundu and Cohen, 2011](#), etc.) traitant en détails chacune des notions abordées. On considère le cas d'un fluide en rotation (dans un milieu non magnétisé dans un premier temps) dans un champ de pesanteur  $\mathbf{g}$ . On cherche à décrire son comportement. Pour cela, on a besoin de plusieurs équations aux dérivées partielles.

#### Équation de continuité

L'équation de continuité (aussi appelé équation de conservation de la masse) nous dit que tout changement de masse dans un volume donné est dû au flux de masse qui traverse la surface qui contient ce volume.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1)$$

Lorsque le fluide est incompressible, cette équation se réduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.2)$$

#### Le tenseur des contraintes

Dans un fluide, on distingue les forces volumiques telle que la gravité ou la force de Coriolis, des forces de surface qui donnent naissance à la viscosité par exemple. Ces forces de surface sont le résultat de l'interaction électromagnétique à courte portée entre les molécules qui s'échangent de la quantité de mouvement. Elles sont représentées par le tenseur des contraintes dont les composantes sont notées  $\sigma_{ij}$ . Les composantes diagonales du tenseur sont les contraintes normales alors que les composantes hors diagonales sont les contraintes tangentielles, ou contraintes de cisaillement. Lorsque le fluide est au repos, il n'y a pas de contraintes tangentielles. Sur chacun des axes, la contrainte normale est l'opposé de la pression

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P \quad (2.3)$$

La contribution de la pression est négative, parce que le fluide est en compression (une contrainte normale positive représente une traction). La pression ainsi définie est identique à la pression au sens thermodynamique et elle peut être définie à partir de l'équation d'état du fluide. Lorsque le fluide est en mouvement, on peut décomposer le tenseur des contraintes en une composante isotrope (qui est toujours le terme de pression) et une composante anisotrope due à la viscosité du fluide<sup>1</sup>. On peut alors réécrire le tenseur des contraintes comme :

$$\sigma_{ij} = -P\delta_{ij} + \mathcal{D}_{ij} \quad (2.4)$$

$\mathcal{D}_{ij}$  est appelé tenseur visqueux (ou aussi déviateur du tenseur des contraintes) et  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker. Les vitesses (de l'écoulement) mises en jeu sont, en général, petites devant la vitesse d'agitation moléculaire. On peut alors supposer que les contraintes engendrées par l'écoulement sont des fonctions linéaires du gradient de vitesse<sup>2</sup>. Cette hypothèse de linéarité conduit à la relation générale suivante :

$$\sigma_{ij} = \mathcal{A}_{ijkl} \frac{\partial v_k}{\partial x_l} \quad (2.5)$$

Si le fluide est isotrope (les propriétés physiques ne dépendent pas de l'orientation), on peut alors montrer que  $\mathcal{D}_{ij}$ , en utilisant les équations (2.4) et (2.5), peut s'exprimer comme :

$$\mathcal{D}_{ij} = 2\mu \left( e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.6)$$

où  $e_{ij}$  est le tenseur des déformations qui n'est rien d'autre que la partie symétrique du gradient de vitesse  $\frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ , et  $e_{kk} = \nabla \cdot \mathbf{v}$  est la trace de ce tenseur.

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.7)$$

## Équation de Navier Stokes

L'équation de Navier Stokes traduit le principe fondamental de la dynamique appliqué à un fluide. La variation temporelle de la quantité de mouvement est égale à la somme des forces qui s'exerce sur un volume  $V$  de surface fermée  $\Sigma$ .

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_V \rho \mathbf{v} d\tau \right] = \int_V \mathbf{f} d\tau + \int_{\Sigma} \sigma \mathbf{n} dS \quad (2.8)$$

où  $dS$  est un élément de surface de normale  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{f}$  la somme des forces extérieures exercées par unité de volume (e.g. la gravité ou la force de Coriolis) et  $\sigma$  le tenseur des contraintes. La dérivée temporelle du premier membre est la dérivée lagrangienne (ou particulaire, notée parfois  $\frac{D}{Dt}$ ) qui peut se décomposer comme la somme de la dérivée eulérienne et de l'accélération convective. Pour un vecteur  $\mathbf{F}$  quelconque, cela se traduit par :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{F} \quad (2.9)$$

La masse du fluide  $\rho d\tau$  reste constante au cours du temps en suivant le mouvement des particules du fluide (au sens de la dérivée lagrangienne). Il est donc possible d'écrire le membre de gauche de

1. Notons qu'avec une telle décomposition, on cache dans le terme de pression toutes les contraintes qui pourraient résulter d'une expansion ou compression isotrope. De telles contraintes existent et sont à l'origine de l'atténuation des ondes sonores. Nous nous limitons donc aux cas où les effets de compressibilité sont négligeables.

2. Il s'agit nécessairement du gradient de vitesse et non de la vitesse elle-même puisque dans un écoulement uniforme, il n'y a pas de mouvement relatif, ni de déformation des éléments du fluide.

l'équation (2.8) comme  $\int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\tau$ . L'intégrale des forces de surface peut s'écrire à l'aide du théorème de Green Ostrogradsky sous la forme :  $\int_V \nabla \cdot \sigma d\tau$ , où  $\nabla \cdot \sigma$  est la divergence du tenseur des contraintes, un vecteur dont la composante  $i$  est  $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ . Comme cette équation est valable pour tout volume  $V$ , on obtient :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} + \nabla \cdot \sigma \quad (2.10)$$

En tenant compte de l'expression du tenseur des contraintes (2.4) et du tenseur visqueux (2.6) la contribution de la composante  $i$  des forces de surface devient dans le cas incompressible et pour une viscosité dynamique  $\mu$  constante :

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j x_j} \quad (2.11)$$

L'équation du mouvement prend alors la forme :

$$\rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla P + \mu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{f} \quad (2.12)$$

Enfin, lorsque l'on se place dans un référentiel tournant de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  et en présence de gravité, l'équation (2.12) devient

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (2.13)$$

où  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$  est la viscosité cinématique et où la force centrifuge a été absorbée dans le terme de gravité. Dans le cas où l'on n'a pas supposé l'incompressibilité du fluide, on ne peut pas réduire le tenseur des contraintes, on obtient alors l'équation plus générale dite de Navier Stokes :

$$\left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathcal{D} + \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (2.14)$$

### Du régime laminaire au régime turbulent

On se place dans le cas simple incompressible. On se propose d'adimensionner l'équation (2.12) dans le cas où les forces volumiques  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ . On pose  $L$  et  $v_0$  une longueur et une vitesse caractéristique de l'écoulement. Le temps caractéristique dynamique est  $\tau = \frac{L}{v_0}$ . On note alors par un prime les variables adimensionnées. L'équation (2.12) devient alors

$$\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t'} + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' = -\nabla' P' + \frac{1}{Re} \Delta' \mathbf{v}' \quad (2.15)$$

où on définit le nombre de Reynolds  $Re = \frac{Lv_0}{\nu}$  et  $P' = \frac{P}{\rho v_0^2}$  est la pression dynamique. Le nombre de Reynolds est alors une estimation du rapport entre les effets d'inertie et de viscosité. Lorsque d'autres effets physiques sont en jeu, d'autres paramètres de similitude apparaissent. Par exemple, si on rajoute un terme de gravité, le rapport des effets d'inertie et de gravité vaut en ordre de grandeur,  $\frac{v_0^2}{gL}$ . C'est le nombre de Froude. De nombreux autres paramètres de similitude existent pour caractériser les rapports relatifs entre différents effets physiques. Leur définition est donnée dans l'Annexe A.

Le nombre de Reynolds est particulièrement important puisqu'il contrôle la transition entre le régime laminaire ( $Re \ll 1$ ) et le régime turbulent ( $Re \gg 1$ ). En astrophysique (et plus particulièrement dans la zone convective des étoiles), le nombre de Reynolds est généralement très grand et l'on se trouve donc dans un régime où les effets inertiels dominent les effets visqueux. Dans le régime turbulent, le champ de vitesse présente un caractère chaotique (absence de toute périodicité) dans l'espace et/ou le

temps et est très sensible aux conditions initiales. Cela impose de traiter les écoulements turbulents par des méthodes statistiques.



**FIGURE 2.1** – Illustration de l’effet du nombre de Reynolds sur l’écoulement d’un fluide autour d’une paroi solide circulaire. La première image correspond au régime de recirculation tourbillonnaire ( $5 < Re < 50$ ), la deuxième au régime de l’allée de Von Karman ( $50 < Re < 1000$ ) et la dernière à un sillage turbulent ( $Re > 1000$ ). Crédits : <http://ielnx1.epfl.ch/e-lin/Ryhming/documents/chapters/documents-published/doc5/node116.html>.

### Le tenseur de Reynolds

On peut décrire les effets de la turbulence par une approche statistique en décomposant les variables  $f$  comme une moyenne statistique  $\langle f \rangle$  et une fluctuation  $f'$ . Notons qu’il ne s’agit pas de linéariser les équations puisqu’on ne suppose pas que  $\|f'\| \ll \|f\|$ . La moyenne peut être soit temporelle (cf équation (2.16a)) dans le cas où la turbulence est stationnaire, i.e. dont les propriétés statistiques sont indépendantes du temps, soit spatiale (cf équation (2.16b)) si la turbulence est homogène, i.e. dont les propriétés statistiques sont indépendantes du point d’observation.

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(\mathbf{x}, t') dt' \quad (2.16a)$$

$$\langle f(t) \rangle = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V f(\mathbf{x}', t) d\mathbf{x}' \quad (2.16b)$$

Tous champs vectoriels  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$ , que l’on peut décomposer comme  $\mathbf{f} = \langle \mathbf{f} \rangle + \mathbf{f}'$  par exemple, suivent alors les règles de Reynolds :

$$\langle \langle \mathbf{f} \rangle \rangle = \langle \mathbf{f} \rangle \quad (2.17a)$$

$$\langle \mathbf{f} + \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} \rangle + \langle \mathbf{g} \rangle \quad (2.17b)$$

$$\langle \mathbf{f} \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f} \rangle \langle \mathbf{g} \rangle + \langle \mathbf{f}' \mathbf{g}' \rangle \quad (2.17c)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_i} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{f} \rangle}{\partial x_i} \quad (2.17d)$$

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right\rangle = \frac{\partial \langle \mathbf{f} \rangle}{\partial t} \quad (2.17e)$$

$$\langle \mathbf{f}' \rangle = 0 \quad (2.17f)$$

Traisons le cas simple : écoulement incompressible, i.e.  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  et densité  $\rho$  constant. Si on injecte cette décomposition dans l’équation (2.12) (en l’absence de force extérieures) sur laquelle on applique

l'opérateur moyenne, on obtient l'équation (2.18) après avoir appliqué les règles de Reynolds (2.17). La plupart des termes proportionnels à  $\langle \mathbf{v}' \rangle$  sont alors nuls sauf le terme  $\langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \rangle$ .

$$\frac{\partial \rho \langle \mathbf{v} \rangle}{\partial t} + \rho \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \rangle = -\nabla \langle P \rangle + \nabla \cdot \langle \mathcal{D} \rangle - \rho \langle (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}' \rangle \quad (2.18)$$

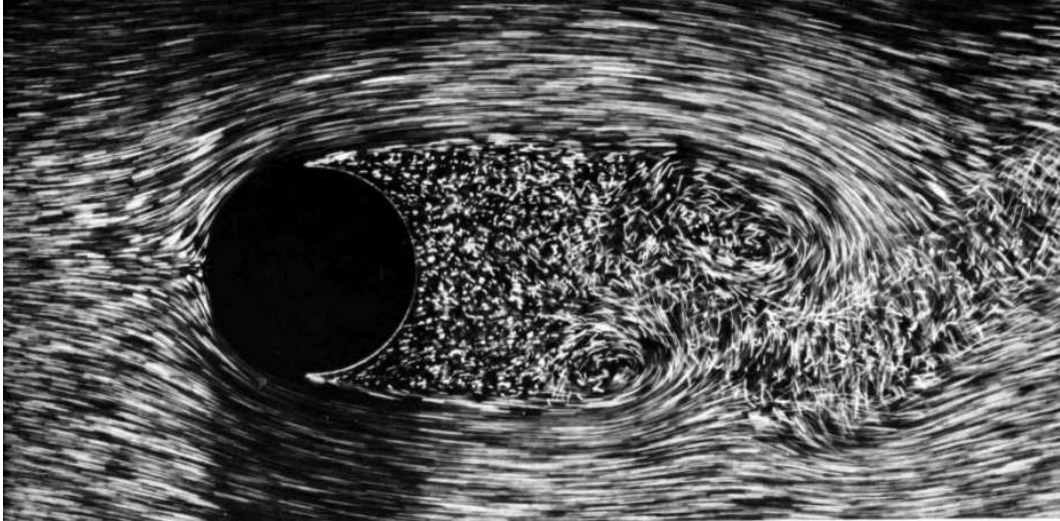
On peut réécrire cette équation en exprimant sa composante  $i$  :

$$\frac{\partial \rho \langle v_i \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \rho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle}{\partial x_j} = -\frac{\partial \langle P \rangle}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\langle \mathcal{D}_{ij} \rangle - \rho \langle v'_i v'_j \rangle) \quad (2.19)$$

où  $\langle \mathcal{D}_{ij} \rangle = \mu \left( \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right)$ . On appelle alors le terme  $\rho \langle v'_i v'_j \rangle$  le tenseur de Reynolds qui est le terme de corrélation entre les fluctuations de vitesse. On voit qu'il a la même dimension que le tenseur des contraintes. De manière générale, le tenseur de Reynolds a donc une composante diffusive et non diffusive. Il n'existe pour l'instant pas de théorie fondamentale capable de prédire une forme analytique au tenseur de Reynolds et l'on doit alors se reposer sur des relations de fermeture *ad hoc* pour clore le système d'équations.

### Spectre de Kolmogorov

Le caractère aléatoire de l'écoulement n'est qu'une des facettes de la turbulence. Un autre aspect essentiel est sa capacité à mélanger rapidement la quantité de mouvement, la chaleur ou la masse. Les fluctuations de vitesse se produisent sur une large gamme d'échelles spatiales et temporelles et assurent très efficacement la production de forts gradients de concentration qui sont finalement atténués par la diffusion à l'échelle moléculaire. L'existence de tourbillons à toutes les échelles spatiales depuis la plus grande dimension de l'écoulement jusqu'à une échelle assez petite pour que la viscosité atténue les mouvements tourbillonnaires, est une caractéristique de la turbulence développée.



**FIGURE 2.2** – Photo de l'écoulement schématisé dans le panneau de droite de la Figure 2.1. On peut y voir les grands tourbillons ainsi qu'une gamme de tourbillons beaucoup plus petits. Crédits : Dyke (1982).

La taille des plus grands tourbillons est déterminée soit par l'échelle globale de l'écoulement, soit par son mode d'instabilité primaire. Kolmogorov (1941) a formalisé la notion de cascade d'énergie dans les écoulements turbulents statistiquement homogène et isotrope<sup>3</sup>. L'énergie cinétique est généralement

3. Ce modèle phénoménologique néglige le phénomène d'intermittence observé dans les écoulements.



injectée au niveau de l'échelle spatiale la plus grande  $L$ . Par des mécanismes d'interactions non linéaires, une partie de cette énergie cascade vers les petites échelles (ce transfert d'énergie a lieu de manière permanente dans l'espace de Fourier représentant l'écoulement). L'hypothèse essentielle est que le taux d'énergie cinétique transférée est la même à toutes les échelles spatiales. On note  $u(l)$  la fluctuation de vitesse caractéristique des tourbillons à l'échelle  $l$ . L'énergie cinétique par unité de masse associée est de l'ordre de  $u(l)^2$ . Une fraction de cette énergie est transférée vers une échelle plus petite. Le temps caractéristique de ce transfert est le temps associé au tourbillon d'échelle  $l$ , soit  $\tau(l) \propto \frac{l}{u(l)}$ . Le taux de transfert de l'énergie cinétique (qui est supposé le même quel que soit l'échelle spatiale  $l$ ) est alors :

$$\epsilon \propto \frac{u(l)}{\tau(l)} = \frac{u(l)^3}{l} \quad (2.20)$$

Tant que les dimensions des tourbillons restent grandes, la viscosité a un rôle négligeable. En revanche, cette cascade d'énergie va se poursuivre jusqu'à atteindre une taille assez petite à laquelle la viscosité devient dominante par rapport aux effets inertiels. Cette taille  $l_d$  correspond donc à l'échelle à laquelle  $Re = 1$  où l'énergie est dissipée par la viscosité moléculaire.

$$Re = \frac{l_d u(l_d)}{\nu} = \frac{l_d \epsilon^{1/3} l_d^{1/3}}{\nu} \quad (2.21)$$

On en déduit la taille  $l_d$  de dissipation en posant  $Re = 1$  :

$$l_d = \nu^{4/3} \epsilon^{-1/4} \quad (2.22)$$

On remarque que plus le nombre de Reynolds de l'écoulement global est grand, plus l'échelle de dissipation est petite<sup>4</sup>. En effet, si le nombre de Reynolds à l'échelle de l'écoulement  $L$  est  $Re(L) = \frac{u(L)L}{\nu} = \frac{\epsilon^{1/3} L^{3/4}}{\nu}$ , alors :

$$l_d = L Re(L)^{-3/4} \quad (2.23)$$

Cela rend les écoulements turbulents, comme le cas de la zone convective solaire ( $Re \sim 10^{11}$ ) extrêmement compliquées à résoudre numériquement car il faut alors résoudre idéalement l'ensemble des échelles spatiales du rayon solaire jusqu'à l'échelle de dissipation moléculaire  $l_d$  qui est  $10^8$  plus petite que  $L = R_\odot$ . Cependant, cette difficulté en apparence insurmontable peut être contournée en ne simulant directement que les grandes échelles de l'écoulement, en paramétrisant l'influence des petites échelles (cf Section 5.2.3).

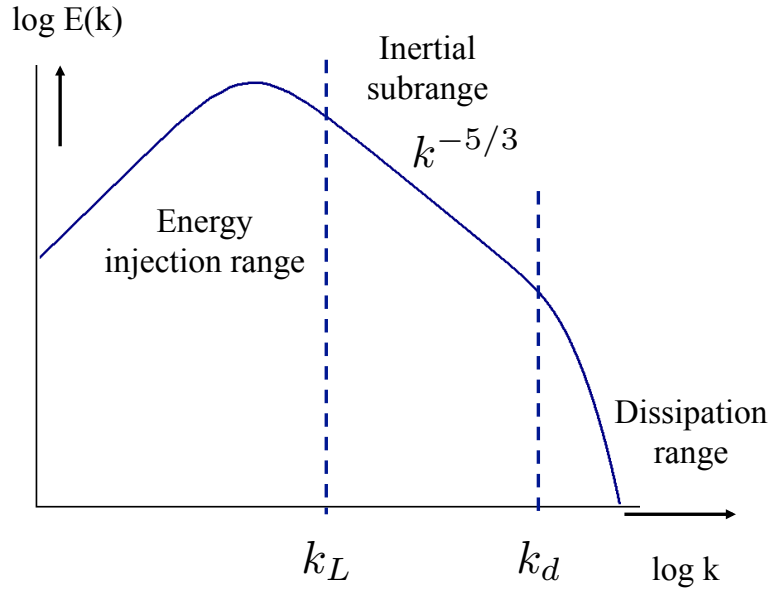
On peut représenter ce phénomène de cascade d'énergie en introduisant l'énergie par unité de masse par mode  $E_k$ , et en supposant que cette dernière ne peut dépendre que de  $\epsilon$  et du nombre d'onde  $k \propto \frac{1}{l}$ , soit  $E(k) = C_k \epsilon^\alpha k^\beta$ . Une simple analyse dimensionnelle nous permet de montrer que :

$$E_k = C_k \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (2.24)$$

où  $C_k$  est un nombre sans dimension de l'ordre de l'unité, appelée constante universelle de Kolmogorov. Cette loi du spectre de puissance en  $k^{-5/3}$  est assez bien vérifiée dans le cas de la turbulence homogène isotrope tridimensionnelle sur une large gamme  $k$ , tant que la cascade d'énergie (2.20) est valable. C'est ce qu'on appelle la gamme inertielle du spectre de Kolmogorov. Aucune théorie fondamentale de la turbulence n'est capable pour le moment de définir précisément  $C_k$ , mais expérimentalement, on trouve  $C_k \simeq 1.5$ . À partir de l'échelle de dissipation visqueuse  $k_d = 1/l_d$ , la viscosité moléculaire transforme toute l'énergie cinétique en énergie thermique. Aux grandes échelles (faibles  $k$ ), le spectre peut prendre des formes très variées en fonction de la manière dont est injectée l'énergie. On représente schématiquement dans la Figure 2.3 ces comportements.

4. Notons qu'on peut définir plusieurs nombres de Reynolds à différentes échelles, mais que le plus souvent on définit une valeur en un endroit de l'espace.





**FIGURE 2.3** – Spectre de Kolmogorov représentant l’énergie par mode  $E(k)$  en fonction de la fréquence spatiale  $k$ . On distingue trois parties principales (dans l’ordre  $k$  croissant) : l’échelle d’injection de l’énergie, inertiel et dissipatif.  $k_L$  représente la fréquence spatiale à laquelle l’énergie est introduite, alors que  $k_d$  est la fréquence à laquelle elle est dissipée. Dans la gamme inertielle, l’énergie suit la loi de Kolmogorov en  $k^{-5/3}$ .

En revanche, en dehors de ce cadre (fluide homogène et isotrope), la turbulence ne suit pas systématiquement cette loi (e.g. [Pouquet et al., 1999](#)). Dans le cas particulier de la turbulence en présence de champ magnétique, [Kraichnan \(1965\)](#) et [Iroshnikov \(1964\)](#) ont établi la première théorie phénoménologique de la turbulence magnétisée, où  $E(k) \propto k^{-3/2}$ . Cependant, il n’est pas clair que ces lois soient universelles pour tous les systèmes, car ces résultats dépendent de nombreux paramètres associés à l’écoulement (voir la revue de [Verma, 2004](#)), par exemple si le milieu est stratifié de manière stable ou non ([Rincon, 2007](#)).

### Variation de l’énergie interne

On revient à la dernière équation nécessaire pour décrire un fluide, qui est une équation scalaire décrivant la variation d’énergie interne. On part du premier principe de la thermodynamique et l’on se place dans le repère tournant à la vitesse  $\Omega$ . On obtient l’équation de la variation d’énergie que l’on exprime en fonction de l’entropie :

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (\kappa \rho c_p \nabla T) + 2\rho\nu \left[ e_{ij}e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] \quad (2.25)$$

où  $S$  est l’entropie du système,  $T$  la température,  $e_{ij}e_{ij}$  la trace du carré du tenseur des déformations,  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante et  $\kappa$  la diffusivité thermique.

### L’équation d’état

Enfin, pour fermer le système d’équations, il faut supposer une équation d’état. On choisit la loi la plus simple de gaz parfait.

$$P = \rho \mathcal{R} T \quad (2.26)$$

où  $\mathcal{R} = c_p - c_v$  est la constante des gaz parfaits. On a également besoin de relier  $S$  aux variables thermodynamiques en utilisant

$$S = c_p \ln T - \mathcal{R} \ln P \quad (2.27)$$

### 2.1.2 Cas Magnétohydrodynamique

Dans le soleil, la température est suffisamment élevée pour ioniser les atomes. On est donc en présence de particules chargées et il est légitime de se demander si les effets électromagnétiques ont un rôle important dans la dynamique. En principe, il faudrait calculer la contribution de chaque particule chargée sur les autres. On peut néanmoins approximer le plasma par un fluide si ces particules sont en forte interaction entre elles, ce qui est le cas dans le plasma solaire grâce à la forte ionisation et la haute densité. Autrement dit, il faut que les phénomènes étudiés aient une échelle spatiale  $L$  et temporelle  $\tau$  respectivement plus grande que la longueur de Debye  $\lambda_D = \left(\frac{k_b T}{4\pi n_e e^2}\right)^{1/2}$  et plus longue que l'inverse de la fréquence plasma  $\omega_P = (4\pi n_e e^2 / m_e)^{1/2}$  (où  $e$  est la charge élémentaire,  $n_e$  la densité électronique,  $m_e$  la masse d'un électron,  $k_b$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température). Dans les intérieurs stellaires,  $\omega_p \sim 10^{11}$  Hz et  $\lambda_D \sim 10^{-4}$  m, on peut donc très largement utiliser l'approximation fluide pour notre étude. Une autre façon de quantifier la continuité d'un milieu est d'évaluer le nombre de Knudsen qui doit être alors très petit devant l'unité mais tout en gardant un indice plasma  $\beta \gg 1$  pour que le champ magnétique n'organise pas globalement l'écoulement. Dans ce cas, les électrons et les ions vont atteindre un état d'équilibre thermodynamique local très rapidement devant tous les autres temps caractéristiques du système et on peut alors considérer les ions et les électrons comme un fluide unique simple.

**TABLE 2.1** – Résumé des conditions nécessaires à l'approximation fluide en présence de champ magnétique.

Nom paramètre	Condition
Longueur de Debye	$\lambda_D \ll L$
Fréquence plasma	$\omega_p \ll \tau^{-1}$
Nombre de Knudsen	$K_n \ll 1$
Indice plasma	$\beta \gg 1$

La MagnétoHydroDynamique (MHD) est alors l'étude de l'interaction entre le champ magnétique et le plasma qui est traité comme un fluide. Il faudra entre autres prendre en compte la force de Lorentz dans l'équation de Navier Stokes, et l'effet Joule dans l'équation pour l'énergie.

### Équation d'induction

L'évolution du champ magnétique  $\mathbf{B}$  est prédite par l'équation d'induction qui provient directement des équations de Maxwell. En effet, dans un plasma magnétisé de vitesse  $\mathbf{v}$ , la loi d'Ohm devient :

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad (2.28)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière,  $\sigma$  la conductivité électrique et  $\mathbf{E}$  le champ électrique. D'autre part, on a l'équation de Maxwell-Ampère en régime non relativiste, où l'on néglige le courant de déplacement :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (2.29)$$

et l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (2.30)$$

En combinant les équations (2.28), (2.29) et (2.30), on obtient l'équation d'induction :

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta_m \nabla \times \mathbf{B})} \quad (2.31)$$

où  $\eta_m$  est la diffusivité magnétique qui est reliée à la conductivité  $\sigma$  par la relation  $\sigma = c^2 / (4\pi\eta_m)$ .

### Équations maîtresses de la MHD

Pour avoir une description de la dynamique complète du système, on a donc besoin des équations de l'hydrodynamique décrites dans la Section 2.1.1 dans lesquelles il faut maintenant inclure les effets du champ magnétique, l'équation d'induction et les équations de Maxwell. On inclut également un flux de chaleur radiatif  $\nabla \cdot (\kappa \rho c_p \nabla T)$  qui est important dans les intérieurs stellaires (cf Section 5.3.1). Le système complet d'équations devient alors :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} \right] &= -\nabla P + \nabla \cdot \mathcal{D} + \rho \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ \rho T \frac{dS}{dt} &= \nabla \cdot (\kappa \rho c_p \nabla T) + 2\rho \nu \left[ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] + \frac{4\pi\eta_m}{c^2} \mathbf{j}^2 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta_m \nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (2.32)$$

En principe, il faut donc résoudre l'ensemble de ces équations pour avoir une description complète du système. Dans nos simulations, le code 3D ASH résout l'ensemble de ces équations sous l'hypothèse anélastique (cf Annexe C). Le code 2D STELEM résout uniquement l'équation d'induction (cf Annexe B) dans l'hypothèse champ moyen (cf Section 2.2.4). Il faut alors prescrire le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , on dit que l'on se place dans le régime cinématique. Cependant, dans le Chapitre 4, on verra que l'on lèvera cette hypothèse en prenant en compte la rétroaction du champ magnétique grande échelle sur la composante  $\phi$  du champ de vitesse.

## 2.2 Effet Dynamo

La dynamo, dans le contexte astrophysique, est la capacité que possède un fluide conducteur d'amplifier et de maintenir un champ magnétique contre sa dissipation ohmique. C'est [Larmor \(1919\)](#) qui pour la première fois a invoqué ce mécanisme pour expliquer la présence de champ magnétique dans le Soleil. Dès lors, la dynamo a été invoquée pour expliquer l'origine du champ magnétique dans de nombreux objets tels que les planètes, les étoiles et les galaxies (cf Section 2.3).

### 2.2.1 Généralités sur la dynamo

L'évolution du champ magnétique est régie par l'équation d'induction (2.31). Deux principaux termes interviennent : le premier est le terme d'induction  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ , et le deuxième est le terme diffusif  $\nabla \times (\eta_m \nabla \times \mathbf{B})$ . On peut réécrire cette équation en décomposant le premier terme  $\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) =$

$(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{v})$  et en adimensionnant l'équation avec une vitesse  $v_0$ , une longueur  $L$  et un champ magnétique  $B_0$  caractéristiques. Les termes prime sont les variables adimensionnées.

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t'} = \left[ \underbrace{(\mathbf{B}' \cdot \nabla) \mathbf{v}'}_{\text{cisaillement}} - \underbrace{(\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{B}'}_{\text{advection}} - \underbrace{\mathbf{B}' (\nabla \cdot \mathbf{v}')}_{\text{compression}} \right] - \underbrace{\nabla \times \left( \frac{1}{R_m} \nabla \times \mathbf{B}' \right)}_{\text{diffusion}} \quad (2.33)$$

où l'on a introduit le nombre de Reynolds magnétique  $R_m = \frac{v_0 L}{\eta_m}$ . Son rôle est crucial puisqu'il représente le rapport entre les processus inductifs (qui maintiennent le champ magnétique) et la dissipation ohmique (qui tend à le faire décroître). La plupart du temps, la recherche d'un effet dynamo passe par la recherche d'un seuil appelé nombre de Reynolds magnétique critique  $R_{m,\text{crit}}$ , au delà duquel l'instabilité dynamo est déclenchée. On voit par ailleurs que c'est le premier terme du membre de droite (cisaillement) qui est capable de mener à une amplification exponentielle du champ magnétique, à un taux proportionnel au gradient local de vitesse. L'effet dynamo peut être alors considéré comme une instabilité qui croît de manière exponentielle dans son régime linéaire jusqu'à ce que les nonlinéarités entrent en jeu et rétroagissent via la force de Lorentz dans l'équation de Navier Stokes sur le mécanisme générateur pour atteindre enfin un état saturé. L'évolution du champ magnétique est donc intimement liée au champ de vitesse  $\mathbf{v}$  du plasma.

Toutefois, avoir  $R_m > R_{m,\text{crit}}$  est une condition nécessaire mais pas suffisante pour entretenir le phénomène dynamo, que ce soit en ayant un écoulement rapide, ou une diffusivité magnétique faible (ou les deux). Tout écoulement n'est pas susceptible de générer du champ magnétique. Par exemple, [Cowling \(1933\)](#) a montré qu'un écoulement purement axisymétrique ne pouvait maintenir l'effet dynamo, et ce indépendamment de la valeur de  $R_m$ . En effet, écrivons la décomposition poloidale/toroidale des champs magnétique  $\mathbf{B}$  et de vitesse  $\mathbf{v}$  dans le cas axisymétrique :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\text{pol}} + \mathbf{B}_{\text{tor}} = \nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.34a)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_p + \varpi \Omega \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.34b)$$

où  $\varpi = r \sin \theta$ ,  $A_\phi$  est la composante longitudinale du potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  (que l'on définit par  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ) et  $\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)$  est la composante poloidale du champ magnétique (noté aussi  $B_{\text{pol}}$ ). On se place dans le cas simple où  $\eta_m$  est constant. En réinjectant cette décomposition dans l'équation (2.33), on obtient l'équation suivante (dans laquelle on a retiré les primes pour une meilleure lisibilité) :

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \underbrace{-\frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi A_\phi)}_{\text{advection}} + \underbrace{\frac{1}{R_m} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi}_{\text{diffusion}} \quad (2.35a)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = \underbrace{-\varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right)}_{\text{advection}} + \underbrace{\varpi (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega}_{\text{cisaillement}} - \underbrace{B_\phi (\nabla \cdot \mathbf{v}_p)}_{\text{compression}} + \underbrace{\frac{1}{R_m} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi}_{\text{diffusion}} \quad (2.35b)$$

Pour fermer la boucle dynamo (cf [Figure 2.4](#)), on a besoin de régénérer continûment les deux composantes du champ magnétique : à la fois du champ toroidal (à partir du poloidal) et du champ poloidal (à partir du toroidal).

Dans le cas de la dynamo solaire, nous verrons que c'est la composante  $\mathbf{B}_{\text{pol}}$  qui est particulièrement difficile à entretenir. En effet, regardons plus en détails le système d'équations (2.35). Advection signifie que le champ ( $A_\phi$  ou  $B_\phi$ ) est transporté par le champ de vitesse, sans création ni destruction de flux. La diffusion, elle, détruit le flux magnétique et agit comme un terme puit. Le terme de compression/dilatation traduit la conservation du flux de champ magnétique lorsque l'écoulement traverse

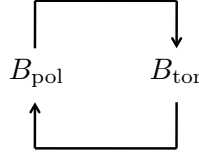


FIGURE 2.4 – Schéma de la boucle dynamo.

un gradient de densité (ce terme est nul dans le cas où le fluide est incompressible), mais ne crée pas ou détruit le champ magnétique. Le terme de cisaillement est lui un réel terme source, convertissant de l'énergie cinétique en énergie magnétique toroidale à partir du champ poloidal. Cependant, il n'existe pas de tel terme source dans l'équation (2.35a) (voir la revue de Charbonneau, 2010). Quelle que soit la valeur de  $B_\phi$  et  $R_m$ , le champ  $A_\phi$  va inexorablement s'atténuer par diffusion. Si on revient à l'équation (2.35b), on remarque qu'une fois  $A_\phi$  nulle, le terme de cisaillement s'annule, entraînant également  $B_\phi$  vers zéro par diffusion. C'est le théorème de Cowling : tout écoulement axisymétrique ne peut maintenir un champ magnétique contre la dissipation ohmique.

D'autres théorèmes anti-dynamo existent. Par exemple, Bullard and Gellman (1954) ont confirmé la conjecture de Elsasser (1946), selon laquelle des mouvements purement toroidaux d'un fluide incompressible avec  $\eta_m$  constant dans une sphère ne pouvait générer d'effet dynamo. D'autres écoulements simples sont également incapables de produire une dynamo : des mouvements plans (Moffatt, 1978) mais aussi les écoulements radiaux à symétrie de révolution (Ivers and James, 1986). Il existe donc de nombreuses restrictions sur la forme de l'écoulement. De ces études, on remarque que les écoulements 3D complexes et non axisymétriques sont les plus susceptibles de générer du champ magnétique, conditions parfaitement réalisées dans des objets aussi turbulents que les étoiles de type solaire.

## 2.2.2 Les différents types de dynamo

### Dynamo lente/rapide

Dans la Section 2.2.1, on a introduit le nombre de Reynolds magnétique comme étant le rapport entre les processus inductifs et dissipatifs. Or, dans le Soleil, le nombre de Reynolds magnétique est extrêmement grand, de l'ordre de  $R_m \sim 10^9$ . Ceci signifie que les temps advectif et diffusif sont très différents. Il apparaît alors légitime de s'interroger sur le rôle que jouent ces 2 temps caractéristiques sur la croissance des champs magnétiques par effet dynamo. Considérons un écoulement stationnaire dans le régime cinématique. Un champ magnétique amplifié par effet dynamo croît de manière exponentielle  $B \sim e^{\sigma t}$  où  $\sigma \in \mathbb{C}$ . Dans les cas où  $R_m \gg 1$ , on peut en fait distinguer deux types de dynamo selon le comportement du taux de croissance  $\gamma(R_m) = \text{Re}(\sigma)$  (où  $\text{Re}()$  est la fonction partie réelle) du champ magnétique (Vainshtein and Zel'dovich, 1972) :

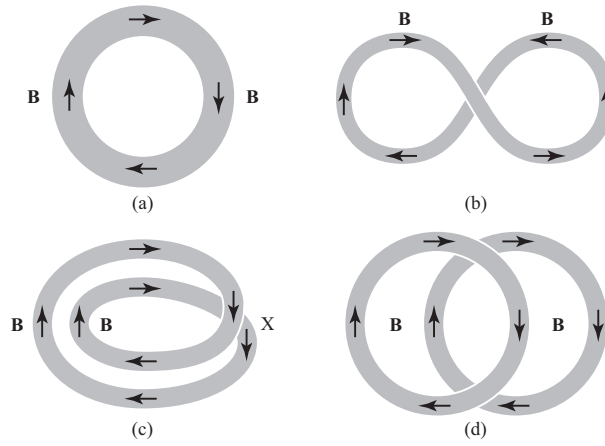
- $\lim_{R_m \rightarrow \infty} \gamma(R_m) = \gamma_0 > 0$  : dynamo rapide
- $\lim_{R_m \rightarrow \infty} \gamma(R_m) = 0$  : dynamo lente

Si  $\gamma_0$  tend vers 0, la dynamo est dite "lente" et agit sur des temps diffusifs. Si, au contraire,  $\gamma$  tend vers une limite positive et finie, la dynamo est dite "rapide" et agit sur des temps advectifs. Les manifestations du champ magnétique solaire décrits à la Section 1.6 montrent plutôt des variations de l'ordre du temps advectif. Il est donc probable que les étoiles aient une dynamo de type rapide.

Intéressons nous plus particulièrement à cette dernière puisque c'est elle qui semble être à l'œuvre dans les étoiles. Dans la limite où  $R_m \gg 1$ , les lignes de champ sont gelées dans l'écoulement et suivent donc les mouvements du fluide (théorème d'Alfvén). Autrement dit, la diffusion moléculaire ne joue aucun rôle (cf équation (2.35)). Dans de telles conditions, le prototype d'une dynamo rapide est le mécanisme dit *Stretch-Twist-Fold* (STF) : si l'écoulement est suffisamment complexe, le champ magnétique peut voir son énergie accrue si ses lignes de champ suivent la séquence illustrée dans la Figure 2.5. On considère un tube de champ magnétique fermé sur lui même formant un volume  $\mathcal{V}$ . On

suit alors l'évolution du tube de champ magnétique à travers l'évolution du fluide grâce au théorème d'Alfvén. Si l'on prend une coupe  $dS$  dans le plan perpendiculaire au tore, le champ magnétique a un flux  $\phi$  constant quel que soit cette coupe (théorème de conservation du flux).

- (a) *stretch* : La première étape consiste à déformer ce tore en augmentant son rayon, mais tout en gardant  $\mathcal{V}$  constant. La section  $dS$  diminue alors augmentant localement l'amplitude du champ magnétique. On peut voir cela comme une augmentation de la pression magnétique. On notera cependant que l'énergie magnétique totale (i.e. intégrée sur  $\mathcal{V}$ ) n'a pas augmenté, il s'agit simplement d'un phénomène de compression.
- (b) *twist* : Puis, en présence de cisaillement dans le champ de vitesse, ce tube de champ magnétique est tordu. Dans ce cas, l'énergie magnétique augmente puisqu'on augmente la tension magnétique grâce à ce cisaillement.
- (c) *Fold* : A ce stade, les lignes de champ magnétique sont susceptibles de s'annuler à cause de la forme du tube de champ (les flèches sur la [Figure 2.5](#) représentent la direction du champ magnétique). On invoque alors le processus de repliement qui permet au tube de champ magnétique de superposer les deux boucles produites.
- (d) *Bilan* : Enfin, les boucles se reconnectent pour former deux tubes de champ magnétique distincts. On a alors augmenté l'énergie magnétique initiale en extrayant l'énergie du cisaillement de vitesse. En répétant ce processus indéfiniment sur chaque nouveau tube de champ, l'énergie magnétique croît alors de manière exponentielle<sup>5</sup>.



**FIGURE 2.5** – Illustration des différentes étapes (voir le texte pour une description plus détaillée) du mécanisme dynamo *stretch twist fold*. La partie grisée représente le volume  $\mathcal{V}$  du fluide que l'on suit dans lequel est gelé un tube de champ magnétique. Les flèches représentent la direction du champ  $\mathbf{B}$ . Crédits : [Dormy and Soward \(2007\)](#).

Pour plus de détails concernant la dynamo rapide et le mécanisme STF, le lecteur peut se référer à la revue de [Childress and Gilbert \(1995\)](#). Cette vision est cependant cinématique, c'est-à-dire que le champ de vitesse n'est pas affecté par le champ magnétique. Autrement dit, l'énergie magnétique est très faible devant l'énergie cinétique du fluide de telle sorte qu'on ne considère pas la rétroaction de la force de Lorentz. La croissance initialement exponentielle du champ magnétique est alors limitée lorsque cette hypothèse ne sera plus valable. Il faut alors résoudre l'ensemble des équations (2.32) de la MHD. On dit alors que l'on est dans le régime dynamique.

5. Notons tout de même que le rôle de la diffusion a un effet subtil car c'est lui qui permet de changer la topologie du champ magnétique.

### Dynamo petite/grande échelle

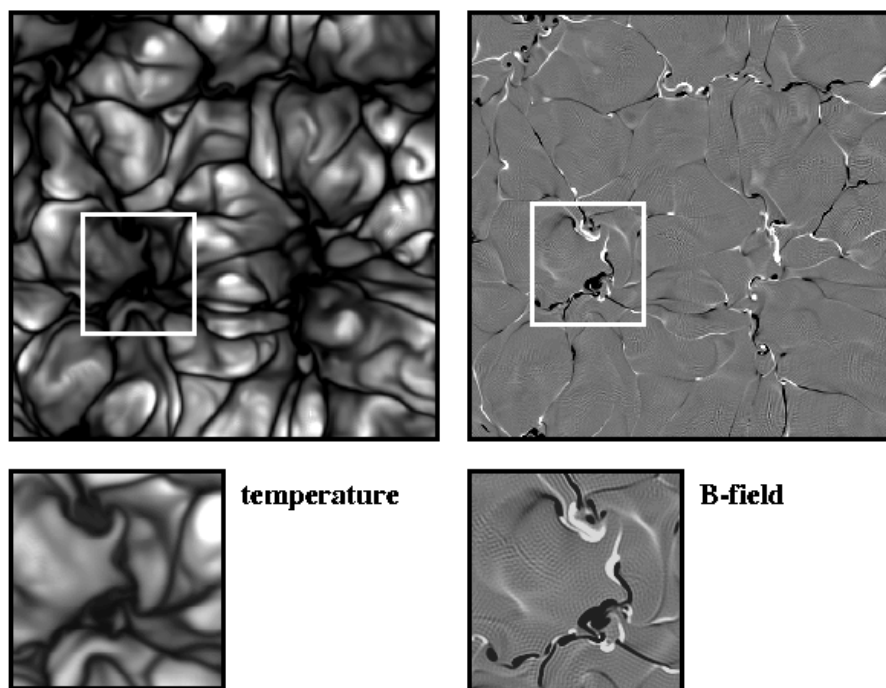
Pour résumer, pour avoir une croissance exponentielle de l'effet dynamo ayant les caractéristiques solaires, on a besoin : d'un nombre de Reynolds magnétique très élevé, un écoulement complexe capable d'amplifier l'énergie magnétique à partir de l'énergie cinétique et être en présence d'une dynamo rapide. La turbulence qui existe dans la zone convective possède les propriétés propices à l'amplification de champ magnétique tel que celui observé dans les étoiles (cf Section 1.6). On parle alors de dynamo turbulente. On divise généralement la dynamo turbulente en deux catégories : petites échelles et grandes échelles selon si le champ magnétique est amplifié sur des échelles plus petites ou plus grandes que les cellules turbulentes les plus larges (voir revue de [Brandenburg et al., 2012](#)).

La dynamo grande échelle est responsable par exemple des cycles magnétiques et des régions actives. Une façon de décrire ces phénomènes est d'utiliser la théorie de dynamo champ moyen. Mais une telle dynamo nécessite des conditions bien particulières pour être efficace (présence de turbulence hélicoïdale ou d'un effet Babcock Leighton notamment, cf Section 2.2.3)

La dynamo petite échelle est, quant à elle, responsable des petites structures (situées dans les régions calmes du Soleil), indépendamment du cycle magnétique et donc de la dynamo grande échelle. En théorie, ce type de dynamo peut être généralement excité dès que le nombre de Reynolds magnétique est suffisamment élevé, et ce même dans une turbulence totalement isotrope comme anticipé par [Batchelor \(1950\)](#), [Biermann and Schlüter \(1951\)](#) et [Elsasser \(1956\)](#). Les fluctuations de vitesse inhérentes à la turbulence sont alors suffisantes pour maintenir le champ magnétique contre sa dissipation ohmique. Le taux de croissance peut être de l'ordre du temps de retournement des plus petites cellules turbulentes, bien plus court que les autres temps caractéristiques d'un système. La théorie désormais admise a été décrite par [Kazantsev \(1968\)](#). Notons que l'énergie magnétique à ces échelles peut venir soit par création nette, soit par cascade de flux émanant des plus grandes échelles ([Stenflo, 2012](#)). L'énergie contenue dans ces petites échelles s'est révélée être dominante grâce notamment aux récentes observations du satellite Hinode ([Otsuji et al., 2007](#)). Parallèlement, de nombreuses simulations de convection sans rotation dans l'approximation Boussinesq (où la compressibilité du fluide est négligeable sauf dans le terme de gravité) ont été effectuées pour modéliser une portion de la zone convective solaire proche de la surface. Deux différentes approches complémentaires ont alors émergées ([Schüssler, 2001](#)). Certains tentent de modéliser le comportement du Soleil, incluant progressivement les effets de compressibilité, ionisation et transfert radiatif ([Stein et al., 2002](#); [Stein and Nordlund, 2003](#)). D'autres construisent des expériences numériques idéalisées afin d'isoler et de comprendre précisément les processus physiques mis en jeu, comme ceux présentés dans la [Figure 2.6](#). Dans ces simulations, le système est dominé par l'écoulement turbulent, ce qui entraîne le champ magnétique dans les régions périphériques des cellules convectives ([Weiss, 1981](#)). Le champ magnétique y est très intermittent, exhibant des polarités mixtes à cause de l'afflux continu de champ magnétique de polarités variées par les mouvements convectifs convergents. Cependant, les travaux récents de [Brown et al. \(2011\)](#), [Nelson et al. \(2011\)](#) et [Nelson et al. \(2013b\)](#) montrent que ce comportement n'est pas forcément partagé dans toutes les conditions. Dans leurs simulations où la rotation est rapide, le champ magnétique s'auto-organise en bandes, ce qui suggère que les petites échelles et grandes échelles interagissent entre elles. Ces simulations sont par contre particulièrement sensibles aux conditions dans lesquels la turbulence agit. Par exemple, en présence d'un champ magnétique externe relativement fort (comme par exemple aux alentours d'une tache solaire), la convection peut être largement inhibée ([Cattaneo et al., 2003](#)). Le nombre de Prandtl magnétique  $P_m = \nu/\eta_m$  est également important puisqu'il définit le seuil au delà duquel la dynamo se déclenche. Autrement dit, le nombre de Reynolds critique  $R_{m,crit}$  dépend de  $P_m$ . La dynamo est en fait plus difficile à obtenir lorsque le  $P_m$  diminue ([Ponty et al., 2005](#); [Schekochihin et al., 2007](#); [Brandenburg, 2011](#)).

Malgré les avancées dans la compréhension de la dynamo, la dynamo petite échelle ne semble pas suffisante pour expliquer l'ensemble des manifestations du champ magnétique dans les étoiles. Comme je me suis intéressé aux caractéristiques grandes échelles du champ magnétique, il faut également





**FIGURE 2.6** – Simulations Boussinesq de dynamo petite échelle dans une zone convectivement instable. *A gauche* : fluctuation de température, avec en blanc les régions ascendantes de plasma chaud et en noir les zones froides de flots descendants. *A droite* : composante verticale  $B_z$  du champ magnétique, avec en blanc (en noir) les régions où  $B_z$  est positif (négatif respectivement). Dans les panneaux inférieurs, on montre le comportement plus détaillé près d'un vortex. Crédits : [Cattaneo et al. \(2003\)](#)

regarder en détails les mécanismes susceptibles de reproduire les observations.

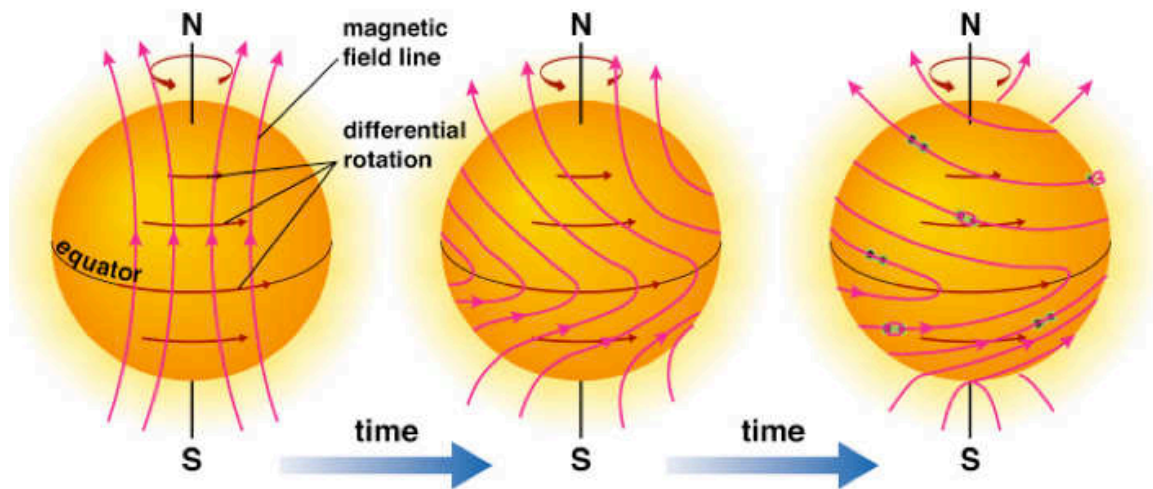
### 2.2.3 Mécanismes générateurs de champ magnétiques à grande échelle

La dynamo petite échelle ne nécessite pas de conditions particulières, seule la nature fluctuante de la turbulence suffit. Cependant, elle n'explique pas les cycles magnétiques, les relations de phases entre le champ poloidal et toroidal à grande échelle, les tâches solaires etc. D'autre part, le projet H & K du Mont Wilson ([Wilson, 1978](#); [Baliunas et al., 1995](#)) a montré que pour les étoiles de type solaire (G & K), il existait une corrélation forte entre le taux de rotation et la période des cycles magnétiques (cf Section 1.5 et 1.6), suggérant que des propriétés *globales* des étoiles avaient une influence significative sur les caractéristiques grandes échelles du champ magnétique. Il nous faut donc comprendre quels sont les mécanismes globaux responsables des caractéristiques à grande échelle. Rappelons que pour que la dynamo opère il faut régénérer à la fois le champ toroidal et le champ poloidal, fermant la boucle dynamo (cf Section 2.2.1).

#### Effet Omega

En présence de rotation, c'est le principal effet pour régénérer du champ toroidal à partir du champ poloidal. Lorsque la rotation est différentielle  $\nabla\Omega \neq 0$ , l'écoulement va cisailer le champ poloidal pour le convertir en champ toroidal. Il s'agit du terme  $\mathbf{B}_{\text{pol}} \cdot \nabla\Omega$  de l'équation d'induction (2.35b). On remarque alors que le gradient peut être à la fois radial et/ou latitudinal, les deux étant présents dans le Soleil (cf Section 1.5). Le nom de l'effet provient de la forme que prend les lignes de champ





**FIGURE 2.7** – Représentation schématique de l'Effet  $\Omega$  où une ligne de champ poloidale est cisailée par un champ de vitesse non uniforme. Crédits : [Bennett et al. \(2011\)](#)

magnétique lorsque ces dernières sont advectées par la rotation différentielle comme on peut le voir sur la [Figure 2.7](#).

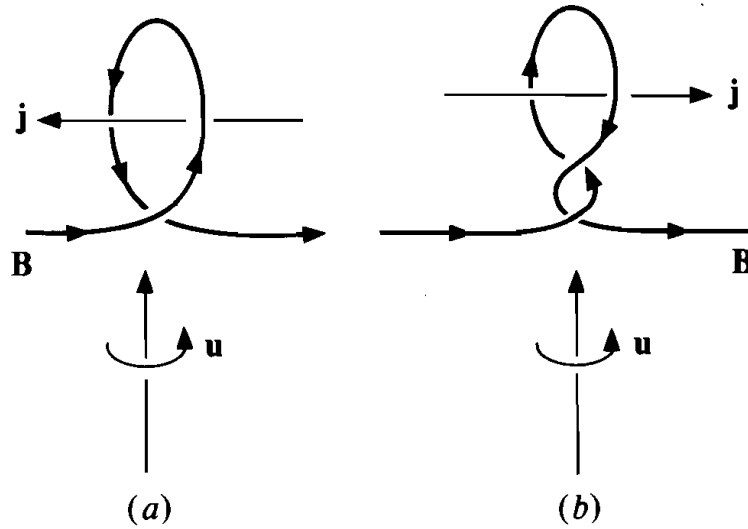
### Effet alpha

Pour clore la boucle dynamo, il faut donc un processus capable de régénérer le champ poloidal. Rappelons qu'un écoulement purement axisymétrique ne peut maintenir un effet dynamo (théorème de Cowling). Il faut donc briser la symétrie de l'écoulement. Pour cela, [Parker \(1955\)](#) a introduit l'effet  $\alpha$  qui permet de tordre un champ toroidal initial pour lui donner une composante poloidale. Comme pour l'effet  $\Omega$ , le nom de l'effet provient de la forme que prend la boucle qui ressemble à la lettre grecque  $\alpha$ <sup>6</sup>. Notons que l'effet  $\alpha$  est également capable de régénérer du champ toroidal (e.g. [Brun et al., 2004](#)) comme on peut le voir dans l'équation (2.43b). Cet effet est dû aux mouvements turbulents hélicoïdaux induits par la force de Coriolis sur les mouvements convectifs. En effet, la rotation induit des mouvements cycloniques du champ de vitesse. Une ligne de champ magnétique est alors déformée comme imagé dans la [Figure 2.8](#).

En principe, l'effet  $\alpha$  peut régénérer du champ poloidal, dont le courant  $\mathbf{j}$  associé est parallèle ou anti-parallèle au champ magnétique initial  $\mathbf{B}$ . Cependant, son caractère cyclonique impose en moyenne une direction privilégiée qui rend l'effet  $\alpha$  antisymétrique par rapport à l'équateur et positif dans l'hémisphère nord ([Krause and Raedler, 1980](#)).

Cet effet est cependant encore aujourd'hui le sujet de nombreux débats. L'un des problèmes majeurs concerne le signe de l'effet alpha. En effet, les équations dynamo impliquant formellement l'effet  $\alpha$  et  $\Omega$  (cf Section 2.2.4) ont la propriété remarquable que les ondes sont solutions de l'équation. Ceci a été démontré pour la première fois en géométrie cartésienne par [Parker \(1955\)](#) qui proposa que les "ondes dynamo" se propageant latitudinalement étaient à l'origine de la migration des tâches solaires vers l'équateur au cours d'un cycle magnétique. [Yoshimura \(1975\)](#) et ([Stix, 1976](#)) ont généralisé ce résultat à la géométrie sphérique. Les ondes dynamo se propagent alors dans la direction  $\mathbf{s}$  donnée par la loi de Yoshimura-Parker :

6. Un abus de langage (malheureusement souvent) employé dans la littérature attribue le terme effet  $\alpha$  à tout processus dynamo grande échelle capable de régénérer du champ poloidal à partir du toroidal, bien qu'il n'y ait physiquement aucun lien avec celui décrit dans cette Section. On s'efforcera dans ce manuscrit à utiliser le terme effet  $\alpha$  pour la génération du champ magnétique poloidal par la turbulence hélicoïdale.



**FIGURE 2.8** – Représentation schématique de l’effet  $\alpha$ . Le champ magnétique est déformé par des mouvements hélicoïdaux locaux. Dans (a) la boucle forme un angle de  $\pi/2$ , c’est-à-dire que le courant associé  $\mathbf{j}$  est anti parallèle à  $\mathbf{B}$ . Dans (b) elle forme un angle de  $3\pi/2$ , i.e.  $\mathbf{j}$  est parallèle à  $\mathbf{B}$ . Crédits : Moffatt (1978)

$$\mathbf{s} = \alpha \nabla \Omega \times \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (2.36)$$

Pour que l’onde se propage vers l’équateur comme dans les observations (i.e.  $\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta > 0$  dans l’hémisphère nord et  $\mathbf{s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta < 0$  dans l’hémisphère sud), et étant donné le signe de  $\alpha$  postulé par la théorie, il faut que  $\frac{d\Omega}{dr} < 0$ . Or aux latitudes concernées à la base de la zone convective, cette condition n’est pas satisfaite, nous forçant à remettre en question les aspects fondamentaux de l’effet  $\alpha$ . D’autre part, le profil choisi pour l’effet  $\alpha$  répond à des besoins ad hoc permettant de reproduire la migration des tâches solaires. L’effet  $\alpha$  est généralement concentré juste au dessus de la tachocline en  $r \simeq 0.75R_\odot$  avec une symétrie latitudinale compatible avec la symétrie de la force de Coriolis (antisymétrique par rapport à l’équateur) qui lui donne naissance. Si au contraire, il agit dans l’ensemble de la zone convective, l’effet  $\alpha$  agit principalement sur le cisaillement latitudinal (de la rotation) résultant en une onde dynamo se propageant radialement vers la surface (Lerche and Parker, 1972). Des modèles plus élaborés ont évidemment été proposés, reposant sur des simulations numériques résolvant la turbulence (voir par exemple Kichatinov and Rudiger, 1993). Bien que fournissant des ingrédients physiques cohérents (diffusivité, effet  $\alpha$ ), cette approche n’échappe malheureusement pas à la nécessité de faire appel à des hypothèses fortes, notamment sur la modélisation de la turbulence (Ruediger and Brandenburg, 1995; Rüdiger and Arlt, 2003).

Plusieurs alternatives pour produire un effet  $\alpha$  ont alors été proposées, comme l’instabilité de tubes de champ magnétiques par force de flottaison (e.g. Moffatt, 1978) ou par cisaillement à la tachocline (Dikpati and Gilman, 2001). En principe, la meilleure solution serait de caractériser l’effet  $\alpha$  par des simulations numériques, mais les conditions extrêmes qui régissent dans la zone convective solaire rendent l’étude très difficile (voir par exemple Cattaneo and Hughes, 2006).

### Effet Babcock Leighton

Pour contourner les nombreux problèmes inhérents à l’effet  $\alpha$  (voir par exemple la revue de Charbonneau, 2010), Babcock (1961) et Leighton (1964, 1969) ont proposé un processus alternatif capable de régénérer le champ poloidal, l’effet Babcock Leighton (BL). Le principe de ce mécanisme est illustré dans la Figure 2.9 et suit les étapes suivantes :

- (a) On considère dans une première étape un champ poloidal initial existant dans l'intérieur de l'étoile.
- (b) Ce champ est cisailé par effet  $\Omega$  et crée du champ magnétique toroidal.
- (c) En particulier à la tachocline, là où le cisaillement est particulièrement fort, le champ magnétique toroidal peut atteindre une amplitude de  $10^5$  G (D'Silva and Howard, 1993; Caligari et al., 1995; Browning et al., 2006) suffisamment forte<sup>7</sup> pour que des tubes de champ montent par la force de flottaison<sup>8</sup>. Ces tubes de champ magnétique, influencés par la force de Coriolis, acquièrent une torsion alors qu'ils traversent la zone convective (D'Silva and Choudhuri, 1993; Fan et al., 1994; Jouve and Brun, 2009; Weber et al., 2011), puis finissent par percer la surface et créent les régions bipolaires actives (cf Section 1.6). Ces tubes de champ présentent alors une inclinaison par rapport à l'équateur : c'est la loi de Joy (Hale et al., 1919), cruciale pour régénérer le champ poloidal.
- (d) Au cours du temps, de plus en plus de flux s'accumule.
- (e) Ce panneau représente en détails l'étape d.
- (f) Le champ magnétique incliné diffuse au cours du temps à la fois en latitude et en longitude, régénérant le champ poloidal.
- (g) Il est alors nécessaire de faire intervenir la circulation méridienne (flèches jaunes sur la Figure 2.9) pour transporter le champ magnétique vers les pôles, provoquant un renversement de la polarité.
- (h) Toujours grâce à cette circulation méridienne, une partie de ce flux magnétique est advectée vers la tachocline, puis vers l'équateur, ce qui est à l'origine de la migration des tâches solaires au cours d'un cycle magnétique.
- (i) Le champ poloidal résultant est alors de signe opposé à celui introduit dans le panneau a et sera à nouveau cisailé renouvelant le cycle mais avec des signes opposés.

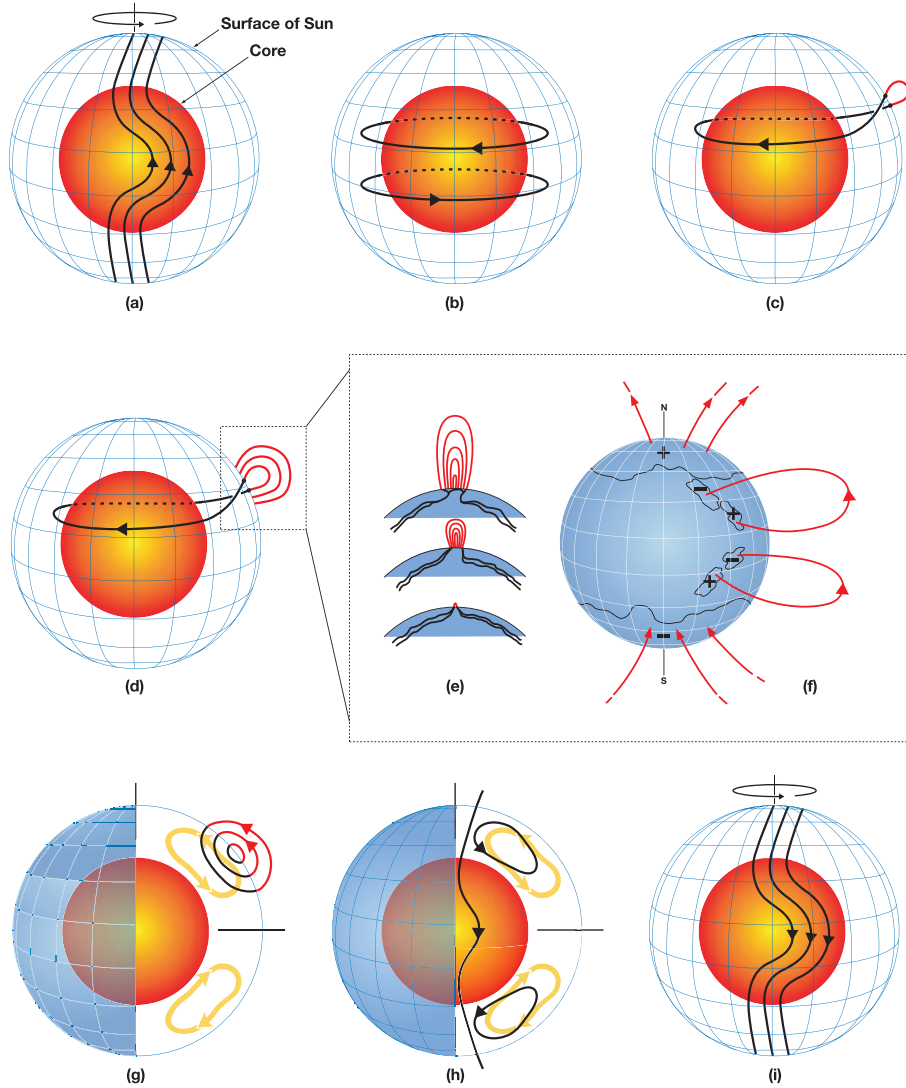
Les modèles incorporant ce processus ont reproduit avec succès de nombreuses caractéristiques du cycle solaire (Wang and Sheeley, 1991; Choudhuri et al., 1995; Dikpati and Charbonneau, 1999; Bonanno et al., 2002; Chatterjee et al., 2004; Jouve and Brun, 2007), et permettent même dans certains cas de tenter de prédire comment seront les suivants (Dikpati and Gilman, 2006; Petrovay, 2010; Jouve et al., 2011), malheureusement sans franc succès jusqu'à présent. Les modèles de Babcock Leighton sont dits à transport de flux car il faut pouvoir lier les deux sources de champ magnétique situées dans des régions séparées (la tachocline pour le champ toroidal et la surface pour le champ poloidal). Dans la plupart des modèles, ce transport est assuré par le processus d'advection de la circulation méridienne, on dit alors qu'on est dans le régime dominé par l'advection. Cependant, il n'est pas encore clair que la diffusion ne puisse pas jouer un rôle important (e.g. Yeates et al., 2008; Karak, 2010), on dit alors que l'on est dans le régime diffusif. Néanmoins, même si l'effet BL est prometteur, les détails exacts de l'émergence des tubes de flux restent encore un sujet de débats (voir la revue de Fan, 2009).

### Circulation méridienne

La circulation méridienne est un écoulement à grande échelle, axisymétrique, et agissant dans le plan contenant l'axe de rotation. Il constitue l'une des pierres angulaires des modèles de Babcock Leighton dans le régime advectif et il est alors crucial de le caractériser. Son amplitude est plutôt faible, de l'ordre de  $20 \text{ m.s}^{-1}$  à la surface (Basu and Antia, 2010), ce qui rend les observations particulièrement difficiles. Grâce aux récents progrès techniques, il est désormais possible d'évaluer précisément ses

7. environ l'amplitude de champ magnétique correspondant à l'énergie d'équipartition (i.e. lorsque l'énergie magnétique est égale à l'énergie cinétique)

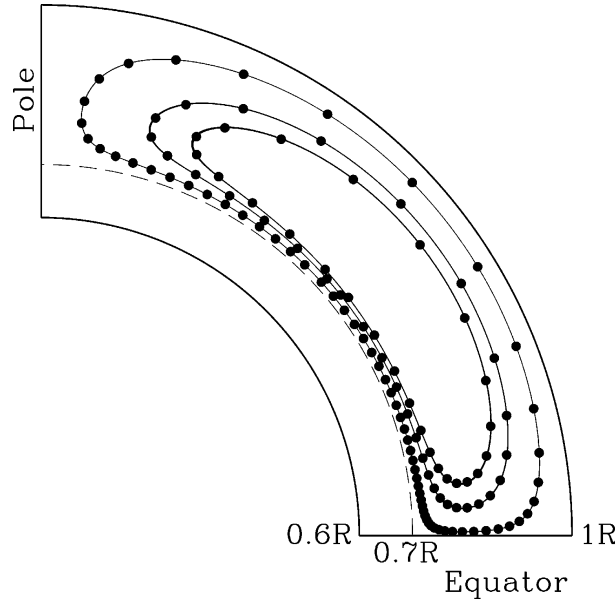
8. En effet, considérons un volume élémentaire de gaz, à l'équilibre de pression et température avec son environnement. La présence d'un champ magnétique intense entraîne une pression magnétique qui, pour rester à l'équilibre, entraîne une dilatation du gaz. La densité de ce volume est alors plus faible et lui permet de remonter vers la surface par flottaison.



**FIGURE 2.9** – Schéma de principe de l’effet Babcock Leighton. La sphère intérieure rouge représente la zone radiative du Soleil alors que la grille bleue est la surface. Entre les deux se situent la zone convective, la où la dynamo opère. Les flèches noires (rouges) représentent les lignes de champ magnétique à l’intérieur (respectivement à l’extérieur) du Soleil, alors que les flèches jaunes représentent le sens de la circulation méridienne. Voir le texte pour une description détaillée des différentes étapes. Crédits : [Dikpati and Gilman \(2006\)](#)

caractéristiques à la surface en suivant les structures magnétiques ([Komm et al., 1993](#); [Hathaway and Rightmire, 2010](#)), ou grâce à l’effet Doppler ([Hathaway, 1996](#); [Ulrich, 2010](#)). Il faut utiliser des méthodes héliosismologiques comme l’analyse en anneaux ([Schou and Bogart, 1998](#); [Haber et al., 2002](#); [Basu and Antia, 2010](#)) ou temps-distance ([Duvall et al., 1993](#); [Giles et al., 1997](#)) pour sonder plus profondément. Ces dernières restent néanmoins limitées à  $0.9 - 0.95R_{\odot}$ . Les modèles théoriques cinématiques, comme ceux utilisés dans la Partie II, doivent donc postuler la forme que prend cette circulation méridienne au cœur de la zone convective et l’on considère généralement le cas simple d’une circulation unicellulaire comme celle représentée dans la [Figure 3.5](#). La vitesse à la base de la zone convective (là où la densité est plus élevée) y est plus faible à cause de la conservation du flux de masse.

Cependant, les détails exacts de son extension aux pôles, de la profondeur de pénétration dans la zone radiative ou encore de la vitesse à la base de la zone convective ne sont pas encore clairs ([Miesch](#)



**FIGURE 2.10** – Un exemple de circulation méridienne unicellulaire représentées par quelques lignes de la fonction de courant associée. Les points représentent la position d'un traceur passif laissé dans l'écoulement à un intervalle de 1 an. L'écoulement est anti horaire à la surface (comme les observations). La densité de points augmente aux pôles et à la base de la zone convective traduisant la faible amplitude de l'écoulement. Crédits : [Dikpati \(2005\)](#)

and Gilman, 2004; Garaud and Bodenheimer, 2010) et sont encore l'objet de nombreuses controverses ([Pipin and Kosovichev, 2011](#); [Kitchatinov and Olemskoy, 2011](#); [Hathaway, 2012](#)). De plus, il s'agit d'un écoulement très variable dont l'amplitude peut aller de  $5 \text{ m.s}^{-1}$  jusqu'à  $40 \text{ m.s}^{-1}$  ([Basu and Antia, 2010](#)) et est notamment influencé par la rétroaction du champ magnétique ([Meunier, 2005](#)). En particulier près des régions actives, là où le champ magnétique est le plus intense, la circulation méridienne montre alors une structure multicellulaire ([Švanda et al., 2007, 2008](#); [Jouve and Brun, 2009](#)). De telles structures fluctuantes et multicellulaires apparaissent également dans les simulations numériques 3D (e.g. [Brown et al., 2008](#); [Matt et al., 2011](#), ou la Partie III de ce manuscrit) car elles sont constamment influencées par les mouvements convectifs. Récemment, [Jouve and Brun \(2007\)](#) ont montré que les cycles magnétiques étaient fortement influencés par le profil de la circulation méridienne puisqu'elle est un des liens entre les régions source du champ magnétique (tachocline et surface) dans le régime advectif (le pompage turbulent peut également jouer ce rôle, cf Chapitre 3). L'origine physique de cette circulation méridienne est discutée dans la Section 6.4.2.

#### 2.2.4 Équation d'induction en dynamo champ moyen

Différentes approches sont possibles pour comprendre la dynamique des intérieurs stellaires. La première est de résoudre l'ensemble des équations (2.32) de la MHD en 3D. C'est cette approche qui est utilisée dans la Partie III de ce manuscrit. Alternativement, des traitements analytiques et numériques existent pour contourner les lourds temps de calculs que nécessite cette approche (de l'ordre de 10 Mh), moyennant quelques hypothèses. Nous allons voir dans cette section comment, en moyennant l'équation d'induction, on peut reproduire les caractéristiques principales du cycle magnétique. C'est l'approche dynamo champ moyen (ou "mean field dynamo theory", noté MFDT). Cette théorie est explorée en détails dans [Krause and Raedler \(1980\)](#).

On se place dans l'hypothèse axisymétrique et dans le régime cinématique, c'est-à-dire que l'ensemble des ingrédients est prescrit (notamment le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ ). Il suffit alors de résoudre l'équation d'induction (2.31). L'idée est d'exprimer, comme dans la Section 2.1.1, les champs vec-

toriels comme la somme d'une composante moyenne  $\langle \mathbf{v} \rangle$  et  $\langle \mathbf{B} \rangle$ , et d'une composante fluctuante  $\mathbf{v}'$  et  $\mathbf{B}'$ . Il ne s'agit pas ici de linéariser l'équation d'induction, puisqu'on ne suppose pour l'instant ni  $\|\mathbf{v}'\|/\|\mathbf{v}\| \ll 1$ , ni  $\|\mathbf{B}'\|/\|\mathbf{B}\| \ll 1$ . La moyenne notée  $\langle \rangle$  peut être interprétée comme la moyenne sur la longitude puisque l'on a supposé l'axisymétrie. Le champ  $\langle \mathbf{B} \rangle$  est alors interprété comme la composante grande échelle, axisymétrique du champ magnétique. Cette procédure suppose alors qu'il existe une séparation d'échelles spatiale et/ou temporelle entre les grandes et les petites échelles. Tous les champs vectoriels suivent alors les règles de Reynolds 2.17. Lorsqu'on injecte cette décomposition dans l'équation (2.31) sur laquelle on applique l'opérateur  $\langle \rangle$ , cette dernière devient

$$\frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{v} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle + \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle - \eta_m \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \quad (2.37)$$

dans lequel le terme clé  $\langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle$  apparaît et correspond à la corrélation qui peut exister entre les fluctuations de vitesse et celles du champ magnétique. On note alors  $\mathcal{E} = \langle \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' \rangle$  la force électromotrice moyenne. Pour obtenir l'équation qui régit l'évolution de  $\mathbf{B}'$ , on soustrait alors l'équation (2.37) à l'équation (2.31) et on obtient :

$$\frac{\partial \mathbf{B}'}{\partial t} = \nabla \times (\langle \mathbf{v} \rangle \times \mathbf{B}' + \mathbf{v}' \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times (\mathbf{v}' \times \mathbf{B}' - \mathcal{E}) - \nabla \times (\eta_m \nabla \times \mathbf{B}') \quad (2.38)$$

On fait alors apparaître le courant électromoteur  $\mathcal{G} = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' - \mathcal{E}$ . Nous avons donc maintenant à notre disposition les équations régissant les deux composantes du champ magnétique en fonction des parties moyenne et fluctuante du champ de vitesse. Or, rappelons que l'on cherche à résoudre uniquement l'équation d'évolution du champ moyen  $\langle \mathbf{B} \rangle$  sans avoir à traiter l'évolution des perturbations  $\mathbf{B}'$ . Il faut alors, et c'est l'étape la plus critique, supposer une relation de fermeture entre la partie moyenne et la partie fluctuante du champ magnétique. Notons que les relations de fermeture sont essentielles dans l'étude de la turbulence par exemple<sup>9</sup>, où les équations de chaque corrélation d'un ordre donné font intervenir des corrélations d'ordre supérieurs. On est en présence ici du même problème.

La relation de fermeture la plus couramment utilisée est dite *First Order Smoothing Approximation* (FOSA), ou encore *Second Order Correlation Approximation* (SOCA). Elle consiste à considérer que le courant électromoteur est nul, ou autrement dit que le champ fluctuant ne peut être maintenu sans champ grande échelle. Cela signifie que la dynamo petite échelle est négligeable, i.e.  $\|\mathbf{B}'\| \ll \|\langle \mathbf{B} \rangle\|$ , ou encore que le nombre de Reynolds magnétique  $R_m \ll 1$ . Cependant, comme mentionné dans la Section 2.2.2, dans la zone convective, là où la dynamo opère,  $R_m \gg 1$  ! Cette approximation constitue donc le talon d'Achille majeur de la MFDT, et divise évidemment la communauté (voir par exemple Rädler and Rheinhardt, 2007). Malgré tout, sous cette hypothèse, cette théorie permet de prédire avec succès de nombreux aspects de la dynamo solaire à grande échelle. C'est la raison pour laquelle de nombreux travaux dont celui ci continuent de l'utiliser. Sous cette approximation, on peut donc exprimer le champ fluctuant  $\mathbf{B}'$  comme une fonctionnelle linéaire du champ moyen  $\langle \mathbf{B} \rangle$ . Dans ce cas là, on exprime  $\mathcal{E}$  comme un développement en série de  $\langle \mathbf{B} \rangle$  et de ses dérivées, dont les composantes sont :

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} \langle B_j \rangle + b_{ijk} \frac{\partial \langle B_j \rangle}{\partial x_k} + \dots \quad (2.39)$$

où  $a_{ij}$  sont les composantes d'un pseudo-tenseur et  $b_{ijk}$  celles d'un tenseur, tous les deux dépendants a priori de  $\mathbf{v}'$  et  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , et où l'on a tronqué à l'ordre 1<sup>10</sup>. Ce développement est valable dans le cas général d'une turbulence anisotrope inhomogène et il faut alors en principe déterminer les coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ijk}$  grâce à des simulations DNS (cf Section 5.2.2) et les appliquer de manière *ad hoc*. Dans le cas le plus simple où la turbulence est isotrope (le cas plus général anisotrope est traité dans le Chapitre 3), l'expression de ces coefficients se simplifie et devient :

9. On pense ici au tenseur de Reynolds dans l'équation de Navier-Stokes.

10. d'où le nom de l'approximation !



$$a_{ij} = \alpha \delta_{ij} \quad (2.40a)$$

$$b_{ijk} = -\beta \epsilon_{ijk} \quad (2.40b)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des fonctions scalaires du temps et de l'espace,  $\delta_{ij}$  le symbole de Kronecker et  $\epsilon_{ijk}$  le symbole de Levi-Civita. Dans ce cas, la nouvelle forme simplifiée de la force électromotrice devient :

$$\mathcal{E} = \alpha \langle \mathbf{B} \rangle - \beta \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle \quad (2.41)$$

Lorsque l'on introduit l'expression (2.41) dans l'équation (2.37), on obtient l'équation (2.42) où l'on a retiré les symboles  $\langle \rangle$  pour plus de lisibilité.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B} + \alpha \mathbf{B} - (\beta + \eta_m) \nabla \times \mathbf{B}) \quad (2.42)$$

Pour mieux comprendre le rôle respectif des coefficients dynamo  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\eta_m$  et  $\Omega$ , on décompose une nouvelle fois les champs vectoriels sur leur composante poloidale et toroidale selon les équations (2.34), sous l'hypothèse axisymétrique.

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \underbrace{(\eta_m + \beta) \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi}_{\text{diffusion}} - \underbrace{\frac{\mathbf{v}_p \cdot \nabla (\varpi A_\phi)}{\varpi}}_{\text{advection}} + \underbrace{\alpha B_\phi}_{\text{effet alpha}} \quad (2.43a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = & \underbrace{(\eta_m + \beta) \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi}_{\text{diffusion}} - \underbrace{\nabla (\eta_m + \beta) \times (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{\text{diamagnétisme}} - \underbrace{\varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right)}_{\text{advection}} \\ & - \underbrace{B_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_p}_{\text{compression}} + \underbrace{\varpi (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega}_{\text{effet omega}} + \underbrace{\nabla \times (\alpha B_\phi) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi}_{\text{effet alpha}} \end{aligned} \quad (2.43b)$$

Intéprétons maintenant ces équations :

- Tout d'abord, on voit que le terme  $\beta$  peut être interprété comme un coefficient de diffusivité magnétique due à la turbulence. Généralement,  $\beta \gg \eta_m$ , on notera alors la diffusivité effective  $\eta = \beta + \eta_m \simeq \beta$ .
- La circulation méridienne représentée par  $\mathbf{v}_p$  joue un rôle primordial, que ce soit dans l'advection du champ  $A_\phi$  ou  $B_\phi$ .
- Lorsque la diffusivité n'est pas constante dans l'espace, on est en présence de transport diamagnétique, mais qui n'est pas un terme source ou puits, de la même manière que le terme de compression.
- On est toujours en présence d'un terme source pour le champ toroidal proportionnel au gradient de la rotation  $\Omega$ , c'est l'effet  $\Omega$ .
- Le terme  $\alpha$  apparaît désormais dans l'équation (2.43a), et représente un réel terme source pour le champ  $A_\phi$ . Il s'agit en fait de l'effet  $\alpha$  tel que celui décrit dans la Section 2.2.3, émanant des mouvements petites échelles (la turbulence) du champ de vitesse  $\mathbf{v}'$ . On voit donc que l'on a contourné le théorème de Cowling.
- Le terme  $\alpha$  apparaît également dans l'équation sur  $B_\phi$ . L'effet  $\alpha$  est donc capable de régénérer à la fois le champ poloidal et le champ toroidal. Selon alors l'importance respective des termes  $\alpha$  et  $\Omega$  dans les équations (2.43), on dit que l'on est en présence d'une dynamo  $\alpha\Omega$ ,  $\alpha^2$ ,  $\alpha^2\Omega$  ou encore BL- $\Omega$  si on considère l'effet Babcock Leighton (cf Section 2.2.3).

Ce sont ces équations qui sont résolues dans la Partie II par le code 2D STELEM.

### 2.2.5 Équations adimensionnées

On peut maintenant adimensionner les équations (2.43) pour comprendre quels sont les paramètres importants de la dynamo en champ moyen. Comme on s'intéresse au champ magnétique à grande échelle spatiale et temporelle, on adimensionne alors les équations en choisissant comme éléments caractéristiques :

- pour la longueur, le rayon solaire :  $R_\odot$
- pour le temps, le temps diffusif :  $\tau_\eta = \frac{R_\odot^2}{\eta_t}$
- pour le champ magnétique, une amplitude :  $B_0$

Il est nécessaire de séparer également les ingrédients physiques  $\alpha$ ,  $\Omega$ ,  $v_p$ ,  $\eta$ . Bien que l'on pourrait les adimensionner avec les quantités définies précédemment, on décide de leur associer des quantités caractéristiques différentes pour bien séparer leurs effets respectifs :

$$\alpha = \alpha_0 \alpha' \quad (2.44a)$$

$$\Omega = \Omega_0 \Omega' \quad (2.44b)$$

$$v_p = v_0 v_p' \quad (2.44c)$$

$$\eta = \eta_t \eta' \quad (2.44d)$$

où les quantités adimensionnées sont notées avec un prime et  $\alpha_0$ ,  $\Omega_0$ ,  $v_0$  et  $\eta_t$  sont des constantes. On résume les valeurs typiques de ces quantités dans la Table 2.2.

**TABLE 2.2** – Valeurs caractéristiques des processus physiques dans la zone convective solaire.

Nom	Symbole	Valeur	Unité
Rayon solaire	$R_\odot$	$6.9599 \times 10^{10}$	cm
Diffusivité magnétique turbulente	$\eta_t$	$10^{11}$	$\text{cm}^2.\text{s}^{-1}$
Taux de rotation à l'équateur	$\Omega_\odot$	2865	nHz
Temps diffusif	$\tau_\eta$	1500	ans
Champ magnétique	$B_0$	$10^4$	G
Vitesse de la circulation méridienne	$v_0$	20	$\text{m.s}^{-1}$

Notons que les quantités avec un prime sont les profils des différents ingrédients physiques. Comme on est dans le régime cinématique, il faut alors postuler leurs forme de manière *ad hoc*. L'équation (2.43) devient alors :

$$\frac{\partial A'_\phi}{\partial t'} = \eta' \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi'^2} \right) A'_\phi - R_m \frac{\mathbf{v}'_{\mathbf{p}}}{\varpi'} \cdot \nabla (\varpi' A'_\phi) + C_\alpha \alpha' B'_\phi \quad (2.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B'_\phi}{\partial t'} = & \eta' \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi'^2} \right) B'_\phi + \frac{1}{\varpi'} \frac{\partial \varpi' B'_\phi}{\partial r'} \frac{\partial \eta'}{\partial r'} + \frac{1}{r'^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta'}{\partial \theta} \frac{\partial \sin \theta B'_\phi}{\partial \theta} \\ & - R_m \varpi' \mathbf{v}'_{\mathbf{p}} \cdot \nabla \left( \frac{B'_\phi}{\varpi'} \right) - R_m B'_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}'_{\mathbf{p}} + C_\Omega \varpi' [\nabla \times (A'_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)] \cdot \nabla \Omega' + C_\alpha [\nabla \times \alpha' B'_\phi] \cdot \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{aligned} \quad (2.45b)$$

dans lesquelles on a introduit les nombres sans dimension suivants et qui caractérisent l'importance de chacun des ingrédients :



$$R_m = \frac{v_0 R_\odot}{\eta_t} \quad (2.46a)$$

$$C_\Omega = \frac{R_\odot^2 \Omega_0}{\eta_t} \quad (2.46b)$$

$$C_\alpha = \frac{\alpha_0 R_\odot}{\eta_t} \quad (2.46c)$$

Traditionnellement, on néglige l'effet  $\alpha$  devant l'effet  $\Omega$  dans l'équation (2.45b), i.e.  $C_\Omega \gg C_\alpha$ . Autrement dit, on se place dans le cas d'une dynamo de type  $\alpha\Omega$ . On remarque de plus que l'on peut simplifier encore l'équation (2.45) en faisant apparaître le nombre dynamo  $D$  défini par (2.47).

$$D = C_\alpha C_\Omega \quad (2.47)$$

et en renormalisant le champ  $A_\phi$  :

$$A_\phi^\star = \frac{A'_\phi}{C_\alpha} \quad (2.48)$$

L'équation d'induction en MFDT devient alors (on a retiré les signes prime pour plus de lisibilité, toutes les variables étant adimensionnées) :

$$\frac{\partial A_\phi^\star}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi^\star - R_m \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi A_\phi^\star) + \alpha B_\phi \quad (2.49a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = & \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi B_\phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \sin \theta B_\phi}{\partial \theta} \\ & - R_m \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right) - R_m B_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_p + D \varpi [\nabla \times (A_\phi^\star \hat{\mathbf{e}}_\phi)] \cdot \nabla \Omega \end{aligned} \quad (2.49b)$$

On remarque qu'il ne reste plus que 2 paramètres sans dimension qui contrôlent le régime dynamo :  $D$  et  $R_m$ . Le nombre dynamo  $D$  caractérise l'efficacité des effets  $\alpha$  et  $\Omega$ . Il faut alors que  $D$  soit supérieure à une valeur critique  $D_c$  au dessus de laquelle l'énergie magnétique croît de façon exponentielle. Dans le cas contraire, l'effet dynamo n'est pas suffisant pour lutter contre la dissipation ohmique, menant à une décroissance du champ magnétique. Le nombre de Reynolds  $R_m$  est lui associé à l'amplitude de la circulation méridienne.

Le champ poloidal peut être régénéré soit par l'effet  $\alpha$ , soit par effet BL. Rappelons que l'effet BL consiste en un terme source à la surface de l'étoile due aux régions actives. Ces dernières sont la manifestation de la remontée de tubes de champ magnétique très intense créés par effet  $\Omega$  à la tachocline en  $r_c \simeq 0.7R_\odot$ . Comme le temps que prend un tube de champ magnétique à émerger vers la surface est faible devant le temps d'un cycle, de l'ordre de la semaine ou du mois (Jouve and Brun, 2009), on considère que le terme source  $S$  est proportionnel au champ magnétique en  $r_c$  au même instant (cela revient à supposer que le champ magnétique créé à la BCZ arrive à la surface de manière instantanée). Même si l'on sait que l'introduction d'un délai dans l'effet BL peut moduler les cycles magnétiques (Yoshimura, 1978; Jouve et al., 2010b), on se restreint pour le moment au cas simple où l'effet BL est instantané. En pratique, il suffit de remplacer <sup>11</sup> $\alpha(r, t)B_\phi(r, t)$  par  $S(r, B_\phi(r_c, t))B_\phi(r_c, t)$ ,

11. A noter que la définition donnée ici est très légèrement différente de Do Cao and Brun (2011) où le terme  $B_\phi$  est inclus dans  $S$

ce qui entraîne les modifications suivantes :

$$C_\alpha \Rightarrow C_s = \frac{S_0 R_\odot}{\eta_T} \quad (2.50a)$$

$$\alpha(r)B_\phi(r, t) \Rightarrow S(r, B_\phi(r_c, t))B_\phi(r_c, t) \quad (2.50b)$$

Dans l'état, ces équations mènent à une croissance exponentielle du champ magnétique, car il n'y a aucun processus non linéaire pour saturer la dynamo. Plusieurs méthodes existent selon ce que l'on souhaite étudier. Le traitement spécifique de ces non linéarités et leurs conséquences seront traités de manière détaillée dans les Sections 3.3 et 4.2.

## 2.3 Les dynamos naturelles et expérimentales

Les recherches menées sur l'effet dynamo sont essentiellement motivées par les observations des dynamos planétaires et stellaires. Les conditions extrêmes qui règnent dans ces objets sont impossibles à reproduire pour le moment dans les laboratoires, ni même dans les expériences numériques (cf Section 5.2.1). Ces expériences de laboratoire et numériques nous aident cependant à comprendre la nature fondamentale de la dynamo puisqu'elles fonctionnent dans des régimes de paramètres différents et nous donnent accès à toutes les quantités observables en détails. La Figure 2.11 montre quel espace de paramètre est couvert par les expériences numériques, les expériences de laboratoire et quelles sont les valeurs réelles dans différents objets astrophysiques. Bien sûr, de nombreux autres paramètres sont en jeu tels que le nombre de Coriolis (influence de la rotation), ou le nombre de Prandtl (influence de la diffusivité thermique). L'espace des paramètres "réel" est gigantesque et il faut garder à l'esprit que la Figure 2.11 ne représente qu'une infime partie de cet espace. Elle illustre néanmoins bien la difficulté à modéliser les processus à l'oeuvre dans ces objets.

### 2.3.1 Dynamo stellaire

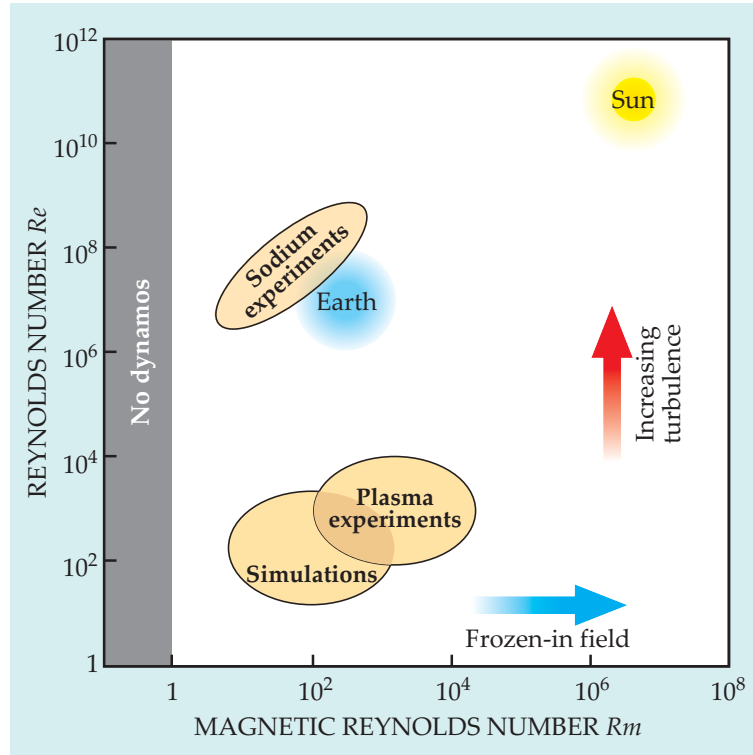
L'effet dynamo dans les étoiles est précisément l'objet d'étude de ce travail. Pour les étoiles de type solaire, le modèle le plus privilégié aujourd'hui est celui dit à transport de flux de type Babcock Leighton en régime dominé par l'advection, même si de nombreuses interrogations demeurent, notamment à propos de la régénération du champ magnétique poloidal et sur le mode de transport du champ (diffusion ou advection). Ainsi, il peut être intéressant de regarder s'il existe un tel effet dynamo dans d'autres objets astrophysiques et de les caractériser.

#### Étoiles de très faibles masses

Les étoiles de très faible masse ( $M_* < 0.3 M_\odot$ ) sont complètement convectives et possèdent une activité magnétique variable et de l'ordre du kG (Hawley, 1993; Hawley et al., 2000; Basri and Mohanty, 2003) couvrant près de 50% de la surface (Johns-Krull and Valenti, 1996). En l'absence d'une zone radiative, on s'attend à ce que cette activité magnétique soit plutôt irrégulière sans cycle apparent, signature d'une dynamo turbulente petite échelle (Durney et al., 1993) plutôt qu'une dynamo grande échelle de type  $\alpha - \Omega$  (cf Section 2.2.2). Leur luminosité en X est particulièrement faible à cause de leur petite taille, ce qui les rend difficiles à détecter. Notons que certaines naines brunes présentent également une activité magnétique, bien que faible (Hawley et al., 2000; Reiners et al., 2009; Reiners and Basri, 2010).

#### Étoiles massives

On considère ici une étoile massive comme une étoile ayant développé un cœur convectif, i.e.  $M_* > 1.5 M_\odot$ . Dans ces étoiles, le cœur est convectif et est enveloppé d'une couche radiative. On s'attend donc à ce que cette différence fondamentale de structure implique des processus



**FIGURE 2.11** – Différents régimes dynamo atteints avec des conducteurs fluides, caractérisés par le nombre de Reynolds  $R_e$  et le nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ . On représente par des ovales les régions de cet espace de paramètre accessibles aux expériences numériques et expérimentales. La place de la Terre et du Soleil dans cet espace sont représentés en bleu et jaune respectivement. La théorie exclut la possibilité d’une dynamo lorsque  $R_m < 1$ . Crédits : [Lathrop and Forest \(2011\)](#).

de maintien de champ magnétique différents. En fait, très peu d’étoiles de ce type apparaissent actives magnétiquement ([Wade et al., 2008](#); [Petit et al., 2011](#)). Seule une petite fraction d’entre elles ( $\sim 10\%$ ), ayant une composition chimique particulière qu’on appelle Ap/Bp<sup>12</sup>, possèdent un champ magnétique ([Aurière et al., 2007](#)). Ces étoiles ont cependant les champs les plus intenses parmi les étoiles non dégénérées, de l’ordre de plusieurs dizaines de kG, avec une topologie simple (e.g. [Hubrig et al., 2005](#); [Elkin et al., 2010](#)). Cependant, il semble désormais que les étoiles de type A normales ([Petit et al., 2011](#)) et en particulier Vega abrite également un champ magnétique ([Lignières et al., 2009](#); [Petit et al., 2010](#)). L’origine de leur champ magnétique de surface ne peut provenir de leur cœur à cause de la difficulté à traverser l’enveloppe radiative jusqu’à la surface ([MacGregor and Cassinelli, 2003](#); [Brun et al., 2005](#)). L’explication la plus probable est l’existence d’un champ fossile dans l’enveloppe radiative ([Moss, 2003](#); [Mestel and Landstreet, 2005](#)), même si la possibilité d’avoir un effet dynamo dans cette enveloppe soit aussi invoquée ([Spruit, 2002](#); [MacDonald and Mullan, 2004](#)). Du champ magnétique a également été détecté dans les étoiles les plus massives de type O (e.g. [Wade et al., 2012](#)) et semble suffisamment intense pour influencer le profil de rotation interne. La variété des mécanismes invoquées pour expliquer le champ magnétique de ces étoiles met en avant encore une fois la difficulté à modéliser la physique complexe impliquée dans la génération de champ magnétique (voir la revue récente de [Walder et al., 2012](#)).

### Étoiles jeunes

On appelle étoiles jeunes celles qui sont entre leur phase de formation et leur arrivée sur la SP.

12. p est l’abréviation de *peculiar*

Elles sont très actives magnétiquement, présentant un champ intense de plusieurs centaines de Gauss, à cause de la présence d'une surface convective turbulente (Feigelson and Montmerle, 1999; Güdel and Nazé, 2009; Johns-Krull, 2007). La topologie du champ, bien que souvent supposée dipolaire par simplicité (e.g. Romanova et al., 2002), semble en fait plus complexe et pas forcément aligné avec l'axe de rotation de l'étoile (Gregory et al., 2006; Yang et al., 2007).

### Étoiles évoluées

Peu d'informations existent sur le champ magnétique des géantes, après leur vie sur la SP. Comme leur rotation est généralement faible à cause de la dilatation de leur enveloppe et que leur zone convective est enfouie en leur cœur, le champ magnétique est généralement faible avec une amplitude inférieure ou égale à 1G (e.g. Konstantinova-Antova et al., 2008, 2010). Les étoiles plus chaudes que le type spectral G montrent une activité magnétique, mais cette dernière devient de plus en plus faible dans les géantes K, voire inexistante dans les géantes M.

### Étoiles dégénérées

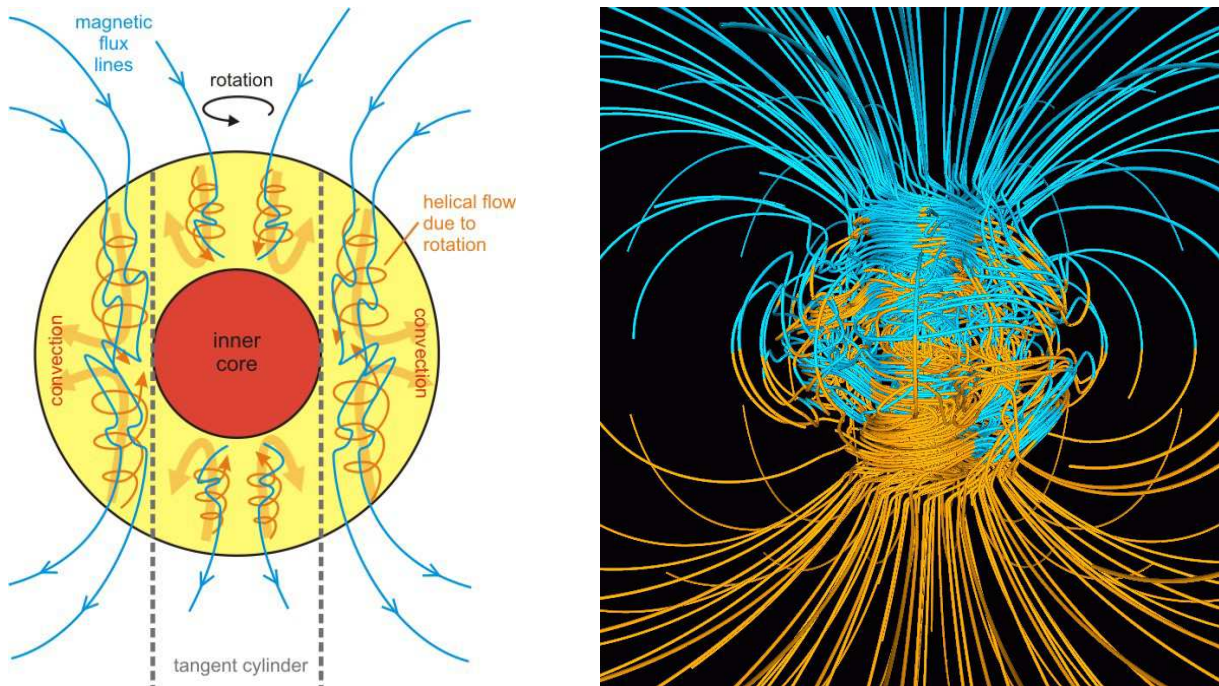
A la fin de leur vie, les étoiles se divisent en trois types d'objets en fonction de la masse avec laquelle elles atteignent la SP : les naines blanches ( $M_* < 8 M_\odot$ ), les étoiles à neutrons ( $8 < M_* < 25 M_\odot$ ) et les trous noirs ( $M_* > 25 M_\odot$ ). Environ 10 % des naines blanches possèdent un champ magnétique dont l'amplitude est relativement élevée, de  $10^6 - 10^8$  G (Mestel, 2001). Ce champ est plutôt uniforme, varie peu d'une naine à une autre et provient simplement du champ fossile laissé par son étoile progénitrice. Dans les étoiles à neutrons, l'intensité du champ magnétique est gigantesque, de l'ordre de  $10^9 - 10^{12}$  G (Mestel, 2001) pouvant aller jusqu'à  $10^{15}$  G dans des objets que l'on appelle magnétars (Duncan and Thompson, 1992). Enfin, pour les trous noirs, le champ magnétique est encore moins bien compris. L'étude est encore plus complexe à cause des effets relativistes et quantiques. L'approche magnétohydrodynamique discutée dans le Chapitre 2 n'est alors plus adaptée. Il faut pour cela choisir une équation d'état appropriée à la matière dégénérée relativiste (Cox, 1968), voire résoudre les équations d'Einstein avec le tenseur électromagnétique (Battaner, 1996; Bonazzola et al., 1998).

## 2.3.2 Dynamo planétaire

Les étoiles ne sont pas les seuls astres à exhiber un champ magnétique généré par effet dynamo. Les planètes également, et en particulier la Terre, ont une structure interne propice à la génération de champ magnétique. Le champ magnétique terrestre a une composante principalement dipolaire mais a un comportement irrégulier (voir la revue de Valet, 2003). On peut voir dans la Figure 2.12 le principe de la dynamo qui opère au cœur de la Terre. Les forts gradients de température et de composition chimique existant dans le cœur externe<sup>13</sup>, provoquent des mouvements convectifs dont la vitesse est de l'ordre d'une dizaine de kilomètres par an. Ce sont ces mouvements convectifs qui vont générer le champ magnétique par effet dynamo, de la même façon que dans les étoiles. Pour produire un modèle dynamique complet, capable de reproduire les observations, Glatzmaier and Roberts (1995) ont développé des simulations numériques réalistes du cœur terrestre. Ces simulations ont permis d'obtenir pour la première fois des renversements du dipôle magnétique, même si des progrès théoriques doivent encore être accomplis (voir la revue de Glatzmaier, 2002).

Certains autres corps du système solaire possèdent également un champ magnétique mais tous avec des caractéristiques différentes (amplitude et/ou topologie), traduisant la sensibilité de l'effet dynamo aux paramètres des corps comme la turbulence, la gravité ou la composition chimique (voir la revue de Stevenson, 2003). Par exemple, Ganymède (Kivelson et al., 2002), Mercure (Connerney and Ness, 1988) et probablement Io (Kivelson et al., 2001) ont un champ magnétique principalement dipolaire, comme la Terre. Au contraire, la Lune (Hood et al., 2001) et Mars (Acuna et al., 1999) n'ont pas de champ magnétique global aujourd'hui, mais montrent localement des structures magnétiques qui

13. liquide composé de Fer et de Nickel



**FIGURE 2.12** – *A gauche* : vue schématique de la dynamo terrestre. Le cœur interne (externe) est représenté en rouge (en jaune respectivement). Les lignes de champ magnétique (en bleu) sont affectées par la convection présente dans le cœur externe. *A droite* : Structure du champ magnétique terrestre en 3D simulé grâce au modèle géodynamo de [Glatzmaier and Roberts \(1995\)](http://www.es.ucsc.edu/~glatz/field.html). Les lignes de champ dirigées vers l'intérieur sont représentées en bleu et vers l'extérieur en jaune. L'axe de rotation est vertical et passe par le centre. Dans le cœur, elles acquièrent une structure complexe à cause de la convection, alors que dans le manteau elles ont une structure potentielle. Le champ magnétique est enroulé autour du cylindre tangent à cause du cisaillement de l'écoulement. Crédits : <http://www.es.ucsc.edu/~glatz/field.html>

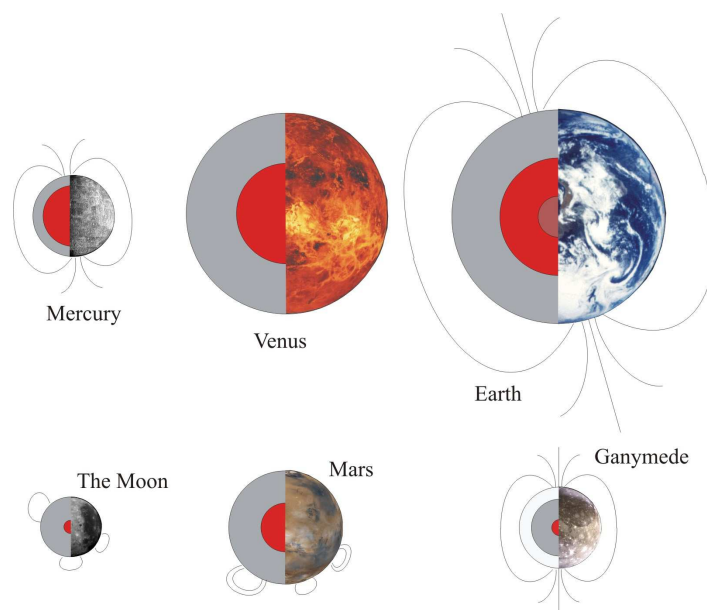
résulterait d'une dynamo primordiale maintenant atténuée. Venus ne possède pas non plus de champ magnétique mais la température élevée ainsi que la faible rotation rétrograde empêche la formation de d'anomalies magnétiques semblables aux deux cas précédents ([Russell, 1980](#)). Sur la [Figure 2.13](#), on représente les champs magnétiques dans les différents corps suscités.

Les planètes géantes possèdent également un champ magnétique. Jupiter arbore un champ principalement dipolaire le plus intense du système solaire (si l'on exclut le Soleil), d'une amplitude de 4 G à l'équateur. On pense que ce champ magnétique est généré par des courants électriques dans le cœur d'hydrogène liquide par un effet dynamo tout à fait comparable à la dynamo terrestre. Enfin, Uranus et Neptune possèdent un champ magnétique plus faible, de l'ordre de 0.1 G, non axisymétrique, et fortement non-aligné par rapport à l'axe de rotation. Ces planètes n'ayant pas de cœur liquide, on pense que c'est dans des couches plus superficielles que ce champ est généré (voir la revue de [Stanley and Glatzmaier, 2010](#)).

### 2.3.3 Dynamo galactique

Les galaxies possèdent aussi des champs magnétiques, mais d'amplitude beaucoup plus faible, de l'ordre de  $10^{-6}$  G ([Beck, 2000](#)). Le champ magnétique est orienté de façon aléatoire dans les bras spiraux alors qu'il est ordonné et plus intense entre les bras et orienté de façon adjacente aux bras spiraux.





**FIGURE 2.13** – Illustration de la structure interne et du champ magnétique de quelques corps du système solaire. Les astres sont à l'échelle. Les champs magnétiques sont représentatifs de leur amplitude relative et de leur orientation. Crédits : [Thompson and Sammonds \(2007\)](#)

Encore une fois, on pense que c'est l'effet dynamo qui maintient un tel champ magnétique ([Beck and Hoernes, 1996](#)). Une dynamo petite échelle dans les protogalaxies peut amplifier un champ magnétique primordial jusqu'à atteindre l'énergie d'équipartition de la turbulence ([Schleicher et al., 2010](#)). Le modèle actuel le plus favorable à la génération du champ magnétique grande échelle observé est la dynamo en champ moyen de type  $\alpha\Omega$ , le même que celui décrit dans la Section 2.2.4, appliqué à un disque mince (voir revue de [Soward, 2003](#); [Shukurov, 2004](#)). Cette dynamo repose sur la turbulence du gaz, la rotation différentielle du disque et les écoulements hélicoïdaux du gaz générés par les explosions de supernova ([Gressel et al., 2008](#)). Avec ce mécanisme, on peut produire du champ magnétique à l'échelle de la galaxie en quelques milliards d'années ([Arshakian et al., 2009](#)).

### 2.3.4 Dynamos expérimentales

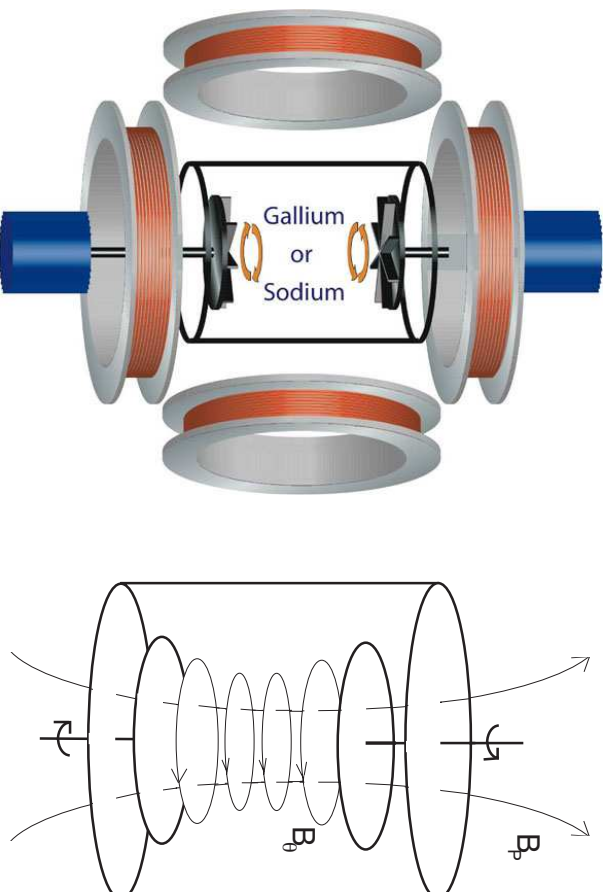
En parallèle des études menées directement sur les objets astrophysiques, de nombreux projets de dynamo expérimentales ont été développés sur le sodium liquide. Les premières dynamos ont été obtenus à Karlsruhe<sup>14</sup> ([Stieglitz and Müller, 2001](#)) et sont basées sur le principe de dynamo cinématique de [Roberts \(1972\)](#), dans lequel des écoulements forcés périodiques engendrent un champ magnétique à grande échelle. Au même moment, [Gailitis et al. \(2001\)](#) reportent également un effet dynamo à Riga<sup>15</sup> dans une expérience basée sur l'écoulement de type Ponomarenko ([Ponomarenko, 1973](#)). Dans ces deux expériences, on a cherché à produire une dynamo dans des conditions les plus simples possibles (laminaires) pour être analysée analytiquement.

Plus tard, une nouvelle classe d'expériences a vu le jour, dans laquelle les écoulements sont turbulents. L'expérience Von Kármán Sodium (VKS1) consiste à entraîner le fluide par deux disques coaxiaux ([Zandbergen and Dijkstra, 1987](#)), le fluide étant enfermé dans un cylindre. Lorsque les disques tournent dans des sens opposés, les écoulements ont des caractéristiques propices à un effet dynamo : une rotation différentielle et la présence d'hélicité proche des disques, mécanismes clés d'une dynamo de type  $\alpha\Omega$ . Malheureusement, même dans ces conditions, la dynamo n'a jamais eu lieu ([Bourgoin et al., 2002](#);

14. ville au sud ouest de l'Allemagne

15. Capitale de la Lettonie

[Pétrélis et al., 2003](#)). Le dispositif a depuis été amélioré, et renommé VKS2. Dans cette expérience, les conditions limites sont cruciales car elles influencent le nombre de Reynolds magnétique critique au dessus duquel la dynamo peut être déclenchée ([Stefani et al., 2006](#)). L'un des changements importants est le changement du matériau des disques en acier par du fer. [Laguerre et al. \(2008\)](#) a étudié en détails le rôle de ces nouvelles conditions limites dans des simulations 2D axisymétriques. Ces améliorations ont finalement généré avec succès une dynamo ([Monchaux et al., 2007](#)). Une très grande variété de dynamos a depuis été déclenchée selon le taux de rotation absolu et relatif des deux turbines : stationnaire, oscillantes, intermittentes etc. ([Berhanu et al., 2007](#)). La [Figure 2.14](#) schématise le principe de l'expérience VKS.



**FIGURE 2.14** – *A gauche* : vue schématique du dispositif dans les expériences de type VKS. Les écoulements sont générés par la rotation indépendante de deux hélices coaxiales, confinés dans un cylindre (en noir sur la figure). Les écoulements sont très turbulents et amplifient un champ magnétique initial axial ou transverse (créé par les bobines) qui est mesuré grâce à des sondes par effet Hall. Crédits : [Pétrélis et al. \(2007\)](#). *A droite* : le champ magnétique toroidal  $B_\theta$  est créé par la rotation différentielle le long de l'axe (effet  $\Omega$ ), alors que le champ poloidal  $B_{pol}$  est généré par la forte hélicité près des disques (effet  $\alpha$ ). Crédits : [Verhille et al. \(2010\)](#)

## Deuxième partie

# Modélisation des cycles magnétiques en dynamo champ moyen





## Effets du pompage magnétique sur les cycles stellaires

## Contents

<b>3.1</b>	<b>Cycles magnétiques dans les étoiles de type solaire</b>	<b>87</b>
<b>3.2</b>	<b>Le pompage turbulent dans la dynamo champ moyen</b>	<b>90</b>
<b>3.3</b>	<b>Modélisation de la dynamo stellaire en présence de pompage magnétique</b>	<b>93</b>
<b>3.4</b>	<b>Caractérisation des cycles pour différents taux de rotation</b>	<b>96</b>
3.4.1	Modèle Standard	96
3.4.2	Modèle Référence	99
3.4.3	Variation du taux de rotation	102
<b>3.5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>105</b>

Dans ce chapitre, nous déterminerons quels sont les processus physiques susceptibles d’influencer la période des cycles magnétiques grâce à des simulations 2D dans l’approche dynamo champ moyen. Plus particulièrement, nous verrons que les modèles les plus satisfaisants à nos jours, dits de type Babcock Leighton, ne sont pour l’instant pas capables de reproduire les tendances observationnelles. Nous allons alors déterminer sous quelles conditions le processus de pompage turbulent peut supplanter la circulation méridienne comme processus advectif et ainsi réconcilier les modèles avec les observations.

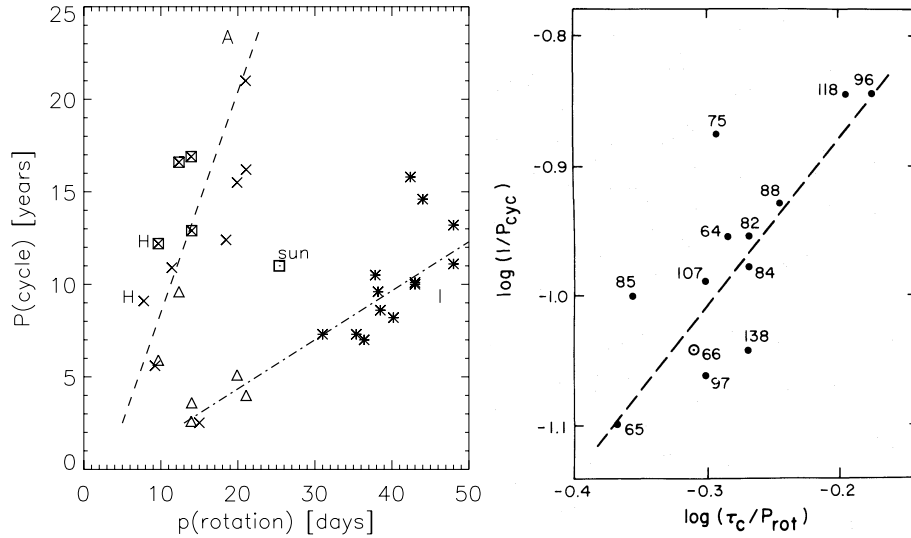
### 3.1 Cycles magnétiques dans les étoiles de type solaire

Malgré les intenses études qui ont été menées sur le Soleil, tant au niveau observationnel que théorique, la dynamo stellaire suscite encore de nombreuses interrogations. Pour mieux contraindre les conditions dans lesquelles elle opère, on peut se demander comment varie ses manifestations dans les autres étoiles. Pour s’assurer que les processus physiques soient comparables à ceux que nous connaissons dans le Soleil, on s’intéresse aux étoiles de type G et K, c’est-à-dire celles comportant une zone convective externe et des propriétés globales ( $T_{\text{eff}}$ ,  $M_*$ ,  $R_*$ ) similaires (cf Section 1.3). Ceci est rendu désormais possible grâce aux satellites tels que Kepler et Corot, mais aussi aux instruments NARVAL et ESPaDOnS capables de fournir des cartes du champ magnétique à la surface des étoiles (cf Section 1.6.2). L’accès à une large variété d’étoiles ouvre de nouvelles perspectives de recherche encore jamais explorées.

Les premiers relevés systématiques de l’activité magnétique ont commencé dès les années 1970 au Mont Wilson (Wilson, 1978; Baliunas et al., 1995). Ils ont permis un suivi de l’activité magnétique

des étoiles sur des périodes de temps de l'ordre de quelques dizaines d'années. En mettant en avant la présence d'une périodicité comparable à celle du Soleil, il est désormais possible de mettre à l'épreuve les modèles théoriques. Par exemple, [Noyes et al. \(1984\)](#) ont montré l'existence d'une corrélation entre la période des cycles magnétiques  $P_{\text{cyc}}$  et la période de rotation  $P_{\text{rot}}$ , soulignant la forte influence de la rotation sur la dynamique interne des étoiles génératrices de champ magnétique.

$$P_{\text{cyc}} \propto P_{\text{rot}}^n \quad (3.1)$$



**FIGURE 3.1** – *A gauche* : Période des cycles d'activités  $P_{\text{cyc}}$  en fonction de la période de rotation  $P_{\text{rot}}$  pour des étoiles de type F à K. Les données suivent deux branches : la branche Active (noté A) et Inactive (noté I). La lettre H indique que les étoiles font parties du groupe des Hyades, les croix (respectivement les astérisques) indiquent l'appartenance des étoiles à la branche A (respectivement I). Les carrés indiquent les étoiles dont l'indice  $B - V < 0.62$  et les triangles les périodes secondaires de quelques étoiles appartenant à la branche A. Le Soleil est représenté par un point entouré d'un carré. Crédits : [Böhm-Vitense \(2007\)](#). *A droite* : Inverse de la période du cycle d'activité en fonction de l'inverse du nombre de Rossby stellaire. Crédits : [Noyes et al. \(1984\)](#).

Cette dépendance est attendue par les théories dynamo en champ moyen puisque la période de rotation intervient dans l'un des paramètres clés de l'équation d'induction 2.45, le nombre dynamo  $D$  définie par (2.47). Plus tard, cette étude a été approfondie par [Brandenburg et al. \(1998\)](#), puis par [Saar \(2002\)](#) qui montrent que l'on peut en fait distinguer deux catégories d'étoiles : les étoiles jeunes dites "Actives" avec  $n = 0.8$  et celles plus vieilles dites "Inactives" avec  $n = 1.15$ <sup>1</sup> (cf [Figure 3.1](#)). [Böhm-Vitense \(2007\)](#) propose alors que deux types de dynamo peuvent opérer : l'un généré par une rotation différentielle de surface (branche Active) et l'autre généré par une tachocline à la base de leur zone convective (branche Inactive). Notons que certaines de ces étoiles semblent montrer une double périodicité appartenant à chacune des deux branches semblables aux cycles de Gleissberg du Soleil ([Saar and Brandenburg, 1999](#)), suggérant que les deux types de dynamo peuvent agir simultanément. Cependant, l'origine de cette double périodicité est encore en débat (voir Chapitre 4), et pourrait résulter par exemple de l'interaction entre les modes dipolaires et quadrupolaires ([Moss et al., 2008](#)). Lorsque l'on prend en compte la structure interne de l'étoile à travers le nombre de Rossby, la corrélation devient unique et on trouve alors  $n = 1.25 \pm 0.5$  ([Noyes et al., 1984](#)). Cependant, ces lois de corrélation sont limitées aux périodes de rotation modérées à cause de la saturation en X de la raie observée

1. Le Soleil se distingue par sa position intermédiaire entre les deux branches.

au delà d'une rotation critique  $P_{\text{sat}}$ . Ceci nous contraint à ne pouvoir donner qu'une limite basse de l'activité magnétique (cf [Figure 1.12](#)). Notons que l'incertitude autour de ces résultats amènent par exemple [Donati and Landstreet \(2009\)](#) à remettre en cause ces corrélations.

Des efforts théoriques ont alors émergé pour comprendre sous quelles conditions on pouvait reproduire les tendances observationnelles. Le modèle champ moyen le plus satisfaisant à ce jour est dit à transport de flux de type Babcock Leighton (BL) (e.g. [Dikpati et al., 2001](#); [Charbonneau and Saar, 2001](#)), dans lequel le champ magnétique poloidal généré à la surface par effet BL (cf [Section 2.2.3](#)), est advecté par la circulation méridienne jusqu'à la tachocline où il est cisailé. La durée du cycle magnétique est dictée par la vitesse de propagation du champ magnétique à la base de la zone convective, là où l'intense champ toroidal, source des tâches solaires, est produit (e.g. [Jouve and Brun, 2007](#)). Comme le transport du champ magnétique y est principalement assuré par la circulation méridienne, cette dernière contrôle fortement cette période : plus l'amplitude de la circulation méridienne  $v_0$  est élevée, plus court est le cycle. Les travaux de [Jouve and Brun \(2007\)](#) montrent en effet que  $P_{\text{cyc}}$  dépend des paramètres du modèle ( $s_0$  l'amplitude de l'effet BL,  $\eta_t$  la diffusivité turbulente,  $\Omega_0$  le taux de rotation) de la façon suivante :

$$P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.91} s_0^{-0.013} \eta_t^{-0.075} \Omega_0^{-0.014} \quad (3.2)$$

Bien que l'on s'attende effectivement à ce que  $P_{\text{cyc}}$  augmente avec  $P_{\text{rot}} (\propto \Omega_0^{-1})$  si tous les autres paramètres restent constants, la dépendance n'est pas aussi forte que dans les observations. Cependant, on peut s'attendre à ce que la circulation méridienne dépende également du taux de rotation. Il est donc essentiel de savoir comment son amplitude  $v_0$  évolue avec  $\Omega_0$  puisqu'elle va dominer tous les autres paramètres. Une analyse rapide de l'équation (3.2) nous montre que pour retrouver la relation (3.1), il faut que  $v_0$  soit environ proportionnel à  $\Omega_0$  (si l'on néglige la dépendance de tous les autres paramètres). Comme l'amplitude de la circulation méridienne est extrêmement faible (de l'ordre de  $20 \text{ m.s}^{-1}$  pour les étoiles de type solaire), de tels écoulements dans d'autres étoiles n'ont pour l'instant pas encore été observés. Nous sommes donc obligés de nous appuyer sur les simulations numériques 3D hydrodynamiques qui traitent de manière cohérente la redistribution du moment cinétique et de l'énergie. Nous utilisons notamment les simulations de [Brown et al. \(2008\)](#) qui ont étudié l'influence du taux de rotation sur les écoulements à grande échelle dans des étoiles analogues au Soleil (i.e. avec la même épaisseur relative de la zone convective par rapport à la zone radiative). En regardant plus particulièrement les Figures 10 et 12 de [Brown et al. \(2008\)](#), on voit que l'énergie cinétique associée à la circulation méridienne  $\text{MCKE} \propto \Omega_0^{-0.9}$ , ce qui revient à la relation (3.3) :

$$v_0 \propto \Omega_0^{-0.45} \quad (3.3)$$

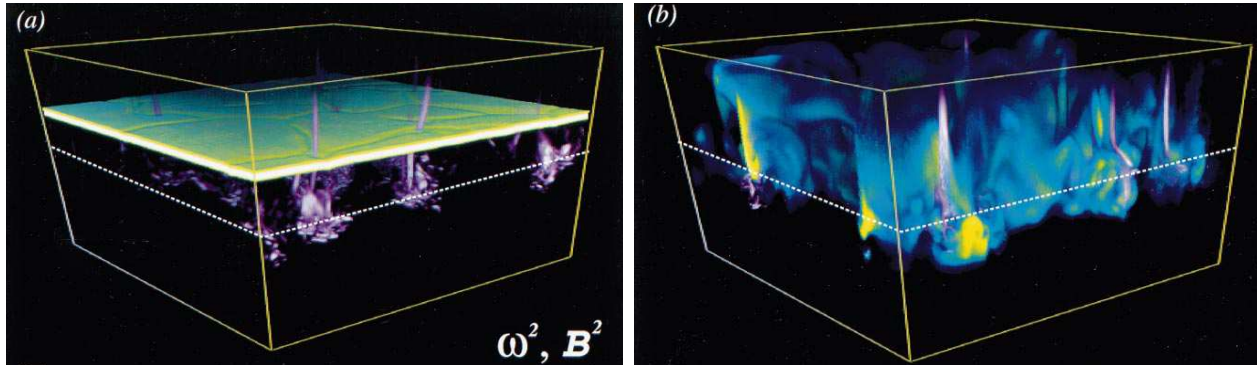
Ce résultat reste valable même en présence d'un champ magnétique créé par effet dynamo ([Brown et al., 2010](#)) et dans les étoiles de type F ([Augustson et al., 2012](#)). En supposant la relation (3.3), [Jouve et al. \(2010a\)](#) confirment en effet qu'en présence d'une circulation méridienne unicellulaire,  $P_{\text{cyc}}$  croît avec le taux de rotation (en désaccord avec les observations), sauf si une circulation méridienne multicellulaire est considérée. Afin de reproduire la tendance observationnelle, nous proposons l'alternative d'explorer l'influence du pompage turbulent sur le cycle magnétique en utilisant une circulation méridienne unicellulaire.

## 3.2 Le pompage turbulent dans la dynamo champ moyen

De manière générale, on appelle pompage magnétique tout transport de champ magnétique au sein de la zone convective qui n'est pas dû aux écoulements à grande échelle. Le pompage turbulent en est un cas particulier qui est dû à une convection non isotrope. Cet effet peut être formalisé par un vecteur noté  $\gamma$  dont la dimension est homogène à une vitesse<sup>2</sup>. D'une part, les simulations de [Tobias et al.](#)

2. La démonstration de cette formalisation est réalisée un peu plus loin dans cette section.

(2001) ont montré que le champ est préférentiellement advecté vers la zone stable (composante radiale  $\gamma_r$ ), sous la zone convective<sup>3</sup>. Dans ces simulations, on introduit une couche de champ magnétique dans une zone convectivement instable qui surplombe une zone stable. En présence d’une convection asymétrique (décrite dans la Section 1.4), les écoulements descendants denses et froids advectent le champ magnétique préférentiellement dans la zone stable (phénomène de pompage) où il est localement amplifié par des processus inductifs. La Figure 3.2 montre que le champ magnétique est advecté dans les zones d’écoulements descendants tracés par une enstrophie (norme de la vorticité) élevée. D’autre part, la composante latitudinale  $\gamma_\theta$  est dirigée vers l’équateur et devient significative lorsque la rotation devient importante, c’est-à-dire lorsque le nombre de Rossby devient inférieur à 1 (Krause and Raedler, 1980). L’origine physique des composantes non radiales du pompage turbulent est complexe puisqu’elles résultent des interactions non linéaires entre le champ magnétique, la convection et la rotation. Leur étude a été pour l’instant restreinte à des simulations 3D de magnétoconvection (e.g. Dorch and Nordlund, 2001; Ossendrijver et al., 2002; Ziegler and Rüdiger, 2003). Dans les étoiles, l’amplitude du pompage turbulent peut atteindre quelques  $\text{m.s}^{-1}$  (Käpylä et al., 2006). On s’attend donc à ce que ses effets soient aussi importants que ceux de la circulation méridienne.



**FIGURE 3.2** – Rendus 3D de la densité d’enstrophie (violet-blanc) et de la densité d’énergie magnétique (bleu-vert-jaune) dans lesquels les valeurs élevées apparaissent opaques et lumineuses. La simulation prend en compte une zone instable convectivement (au dessus de la ligne en pointillés) au dessus d’une zone stable, et étudie l’évolution d’une couche de champ magnétique au cours du temps. (a) Configuration initiale d’une couche fine de champ magnétique insérée dans la zone convective. (b) Après un certain temps, le champ magnétique est concentré et localement amplifié dans la zone stable à cause des écoulements descendants denses convectifs. Crédits : Tobias et al. (2001).

Malgré ces résultats, les effets du pompage turbulent n’ont été que rarement étudiés dans les modèles dynamo en champ moyen (e.g. Brandenburg et al., 1992). Comme ces derniers étaient déjà capables de reproduire avec une certaine fidélité le champ magnétique solaire à grande échelle, le pompage turbulent était considéré comme une complication supplémentaire non nécessaire. La première approche montrant l’importance du pompage dans les cycles magnétiques a été réalisée par Brandenburg et al. (1992). Dans leur dynamo  $\alpha - \Omega$ , les ondes dynamos changent de sens de propagation en présence de pompage turbulent malgré la règle de Parker-Yoshimura (cf Section 2.2.3). Plus tard, dans les modèles de BL, Guerrero and de Gouveia Dal Pino (2008) ont montré que le pompage turbulent pouvait devenir le mécanisme advectif dominant, et ainsi imposer la durée du cycle suivant la relation (3.4).

$$P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.12} \gamma_r^{-0.51} \gamma_\theta^{-0.05} \quad (3.4)$$

dans l’intervalle  $v_0 \in [500; 3000]$ ,  $\gamma_{r0} \in [20; 120]$ ,  $\gamma_{\theta0} \in [60; 140]$  en  $\text{cm.s}^{-1}$ . Un autre point remarquable de ces modèles est que le champ magnétique de surface n’est plus concentré près des régions polaires,

3. Ceci a une importance cruciale pour la génération de champ magnétique toroidal (cf Section 7.1.2)

comme c'est habituellement le cas dans les modèles BL en régime advectif. Le champ poloidal advecté aux pôles par la circulation méridienne à la surface est en effet "pompe" efficacement vers le centre de l'étoile. Le pompage turbulent semble donc être un processus capable de répondre à la controverse. Nous allons caractériser ces effets et déterminer les conditions sous lesquels il peut effectivement concilier les théories aux observations.

Nous avons vu dans la Section 2.2.4 que la théorie dynamo en champ moyen fait apparaître la force électromotrice  $\mathcal{E}$ . Ce terme dans le cas général est définie par l'équation (2.39). Dans le cas où la turbulence est isotrope, le tenseur  $a_{ij}$  peut être réduit à un scalaire  $\alpha$ . Or le pompage turbulent est dû à une turbulence anisotrope. Il apparaît dorénavant nécessaire de prendre en compte le tenseur  $a_{ij}$  sous sa forme la plus générale. Rappelons que la force électromotrice (cf équation (2.39)) s'écrit :

$$\mathcal{E}_i = a_{ij}B_j + b_{ijk}\frac{\partial B_j}{\partial x_k} + \dots \quad (3.5)$$

Comme la partie diffusive  $b_{ijk}\frac{\partial B_j}{\partial x_k}$  est identique à celle du cas isotrope, on s'intéresse uniquement au terme  $a_{ij}B_j$  que l'on sépare en une composante symétrique et antisymétrique :

$$a_{ij}B_j = \underbrace{\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})B_j}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})B_j}_{\text{antisymétrique}} \quad (3.6)$$

La partie antisymétrique peut se réécrire comme :

$$\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})B_j = \epsilon_{ijk}\gamma_j B_k \quad (3.7)$$

qui est le produit vectoriel  $\gamma \times \mathbf{B}$ , où l'on définit :

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) \quad (3.8a)$$

$$\gamma_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}a_{jk} \quad (3.8b)$$

Les composantes diagonales de la partie symétrique du tenseur  $\alpha_{ij}$  n'est rien d'autre que la régénération de champ magnétique par l'effet  $\alpha$  que l'on a décrit dans la Section 2.2.4. Les composantes non diagonales de  $\alpha_{ij}$  peuvent être absorbées dans le terme  $\gamma$  qui devient alors différent pour chaque composante du champ magnétique (Kichatinov, 1991; Ossendrijver et al., 2002; Käpylä et al., 2006). Nous considérerons pour l'instant le cas simple où le pompage turbulent agit de manière similaire sur toutes les composantes du champ magnétique. La force électromotrice  $\mathcal{E}$  peut alors se réécrire comme :

$$\mathcal{E} = \alpha\mathbf{B} + \gamma \times \mathbf{B} - \beta\nabla \times \mathbf{B} \quad (3.9)$$

où  $\alpha$  est une fonction scalaire, i.e. la partie diagonale du tenseur  $\alpha_{ij}$ . L'équation d'induction (2.37) (où l'on a omis les symboles de moyenne  $\langle \rangle$ ) devient alors :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \alpha\mathbf{B} + \gamma \times \mathbf{B} - (\beta + \eta_m)\nabla \times \mathbf{B}) \quad (3.10)$$

On remarque alors que  $\gamma$  joue le même rôle que  $\mathbf{v}$ . Il s'agit donc d'un effet advectif additionnel. En principe,  $\alpha$ ,  $\gamma$  et  $\beta$  ont pour origine le même champ de vitesse fluctuant. On peut donc s'attendre à une corrélation entre ces trois termes (Krause and Raedler, 1980). Cependant, dans les configurations complexes considérées ici (sphère convective en rotation), la valeur exacte des coefficients  $a_{ij}$  et  $b_{ijk}$ , dont ces termes sont issus (voir équations (2.40) et (3.6)), reste incertaine malgré les efforts continus pour les déterminer (see e.g. Ossendrijver et al., 2002; Cattaneo and Hughes, 2006; Käpylä et al., 2006).

Dans toute la suite, on ne supposera donc aucune corrélation entre  $\gamma$  et  $\beta$ . De plus, comme on peut le voir dans l'équation (3.10),  $\beta$  est un terme de diffusivité effective dont les effets sont connus. On se concentrera donc sur les effets de  $\gamma$  pour  $\beta$  fixé, bien qu'en principe une étude exhaustive de tout l'espace  $\{\gamma; \beta\}$  devrait être menée. Ce dernier est bien sûr un sous ensemble de l'espace complet des paramètres qui gèrent le système. D'un point de vue plus général, ces champs  $(\alpha, \gamma, \beta)$  sont également couplés aux écoulements grandes échelles telles que la rotation différentielle et la circulation méridienne via le terme  $\mathbf{v}$ , puisqu'ils émanent d'un même système physique impliquant des processus physiques complexes et non linéairement couplés. C'est pourquoi il faut soit prendre en compte leur rétroaction respective (voir par exemple Kichatinov and Rudiger, 1993; Kichatinov et al., 1994), soit résoudre le système complet d'équations de la MHD (2.32) en s'appuyant sur les simulations numériques 3D (voir Partie III). On applique maintenant les mêmes hypothèses et décompositions que dans la Section 2.2.4 pour le terme de pompage :

$$\gamma(r, \theta) = \gamma_{\mathbf{p}}(r, \theta) = \gamma_r(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_r + \gamma_\theta(r, \theta)\hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (3.11)$$

On introduit les nombres sans dimensions  $C_{\gamma r} = \gamma_{r0}R_\odot/\eta_t$  et  $C_{\gamma \theta} = \gamma_{\theta 0}R_\odot/\eta_t$  (similaires au nombre de Reynolds magnétique  $R_m$ ) qui caractérisent l'amplitude de chaque composante  $\gamma_r$  et  $\gamma_\theta$ . Dans les étoiles de type solaire, la composante  $\hat{\mathbf{e}}_\phi$  est négligeable devant la rotation différentielle. On choisit de se placer dans la dynamo de type BL- $\Omega$ . Les équations d'induction adimensionnées résolues par STELEM deviennent finalement :

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi + C_s S(r, \theta) B_\phi(r_c, \theta) - R_m \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi A_\phi) \quad (3.12a)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\varpi} (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \cdot \nabla (\varpi A_\phi) \\ \frac{\partial B_\phi}{\partial t} = & \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi B_\phi)}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - R_m \left[ \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right) - B_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_p \right] \\ & + C_\Omega \varpi (\nabla \times (A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega \\ & - \varpi (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right) - B_\phi \nabla \cdot (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \end{aligned} \quad (3.12b)$$

### 3.3 Modélisation de la dynamo stellaire en présence de pompage magnétique

#### Domaine, conditions limites et conditions initiales

Pour résoudre les équations (3.12), on utilise le code STELEM (voir Annexe B). La simulation résout l'équation d'induction dans un demi-anneau qui couvre les deux hémisphères, i.e.  $\theta \in [0, \pi]$  et qui s'étend de la surface à légèrement en dessous de la tachocline, i.e.  $r \in [r_{\min}; r_{\max}] = [0.6, 1]R_\odot$ , pour capturer les effets liés au cisaillement. Toutes les simulations ont été menées avec une résolution de 129x129. On suppose que le cœur radiatif est un conducteur parfait, et on impose que les champ  $A_\phi$  et  $B_\phi$  soient nuls le long de l'axe de rotation pour garantir la non divergence du champ magnétique. Cela se traduit par les conditions limites suivantes :

$$A_\phi = B_\phi = 0 \text{ en } r = r_{\min} \quad (3.13a)$$

$$A_\phi = B_\phi = 0 \text{ en } \theta = \{0, \pi\} \quad (3.13b)$$

A la surface, on considère que le champ est potentiel, i.e. que le vide occupe l'espace en  $r \geq R_\odot$ . Formellement, cela se traduit par  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ , ce qui pour chaque composante  $A_\phi$  et  $B_\phi$  donne



$$\left. \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \right|_{r=r_{\max}} = 0 \quad (3.14a)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) A_\phi \Big|_{r=r_{\max}} = 0 \quad (3.14b)$$

Chaque modèle est initialisé avec un champ dipolaire confiné dans la zone convective, c'est-à-dire au-delà de la tachocline localisée en  $r_c = 0.7$ . Ce champ est donc défini par

$$A_\phi = \begin{cases} \frac{\sin \theta}{r^2} & \forall r \in [r_c; 1] \\ 0 & \forall r \in [r_{\min}; r_c] \end{cases} \quad (3.15)$$

### Profils des ingrédients physiques

Dans le cas d'une dynamo champ moyen, STELEM résout l'équation d'induction 3.12 en régime cinématique. Tous les ingrédients physiques sont donc générés a priori, tout en capturant le plus fidèlement possible les processus physiques. Tous les profils décrits ci-après sont normalisés à l'unité de telle sorte que les quantités adimensionnées (2.46) définissent l'amplitude absolue de chaque effet. Les longueurs (et notamment le rayon  $r$ ) sont normalisés par le rayon solaire  $R_\odot$  sauf lorsqu'explicitement indiqué.

Pour modéliser de façon réaliste la rotation différentielle solaire déduite de l'héliosismologie (Thompson et al., 2003), on définit la fonction  $\Omega$  telle que représentée dans la Figure 3.3. Ce profil suppose qu'en dessous de  $r=0.66$ , la rotation est solide, alors que la zone convective est sujette à un gradient à la fois latitudinal (équateur plus rapide que les pôles) mais aussi radial qui est maximum à la tachocline.

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_c + \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{d_1} \right) \right] [1 - \Omega_c - c_2 \cos^2 \theta] \quad (3.16)$$

avec  $r_c = 0.7$ ,  $d_1 = 0.02$ ,  $\Omega_c = 0.92$  et  $c_2 = 0.2$ .

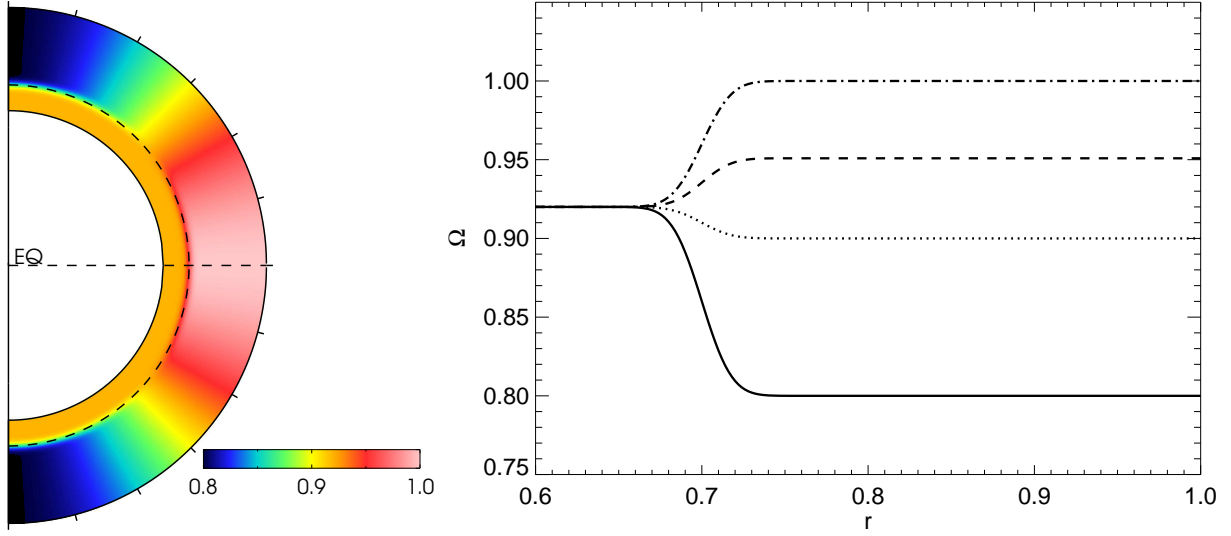
On suppose que la diffusivité  $\eta$  est dominée par la diffusivité turbulente  $\eta_t = 5 \times 10^{10} \text{ cm.s}^{-1}$  dans la zone convective, alors que dans la zone radiative, on a  $\eta_c = 5 \times 10^8 \text{ cm.s}^{-1}$ . Cela permet de modéliser la chute de diffusivité en l'absence de mouvement convectif (cf Section 2.2.4 pour plus de détails quant à la diffusivité effective due à la convection). La transition s'effectue de manière rapide (sur l'épaisseur de la tachocline  $d_1$ ) mais continue grâce à une fonction erreur (cf Figure 3.4).

$$\eta(r) = \frac{\eta_c}{\eta_t} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\eta_c}{\eta_t} \right) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{d_1} \right) \right] \quad (3.17)$$

Dans les modèles de Babcock-Leighton, le champ poloidal est régénéré grâce à l'inclinaison des régions bipolaires actives à la surface (cf Section 2.2.3). Pour modéliser cet effet, le terme  $S$  est confiné dans une couche externe fine d'épaisseur  $d_2 = 0.01$  localisée juste en dessous de la surface en  $r_2 = 0.95$ . Le terme source BL dépend de  $B_\phi$  en  $r = r_c$ . On suppose pour simplifier que le délai de transmission entre la tachocline et la surface est nul même si ce temps n'est pas négligeable devant la durée d'un cycle magnétique (cf Section 2.2.5). Jouve et al. (2010b) ont montré qu'un délai de seulement quelques jours pouvait produire des modulations de long terme du cycle solaire, mais ce délai n'a que peu d'influence sur la période magnétique en elle-même. Comme les régions actives apparaissent préférentiellement à latitude moyenne,  $S$  est maximum en  $\theta \simeq \frac{\pi}{4}$ , mais nul aux pôles et à l'équateur. On décide alors de choisir la dépendance latitudinale la plus simple répondant à ces conditions :

$$S(r, \theta, B_\phi(r_c, \theta, t)) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_2}{d_2} \right) \right] \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 1}{d_2} \right) \right] S_{\text{sat}} \cos \theta \sin \theta \quad (3.18)$$



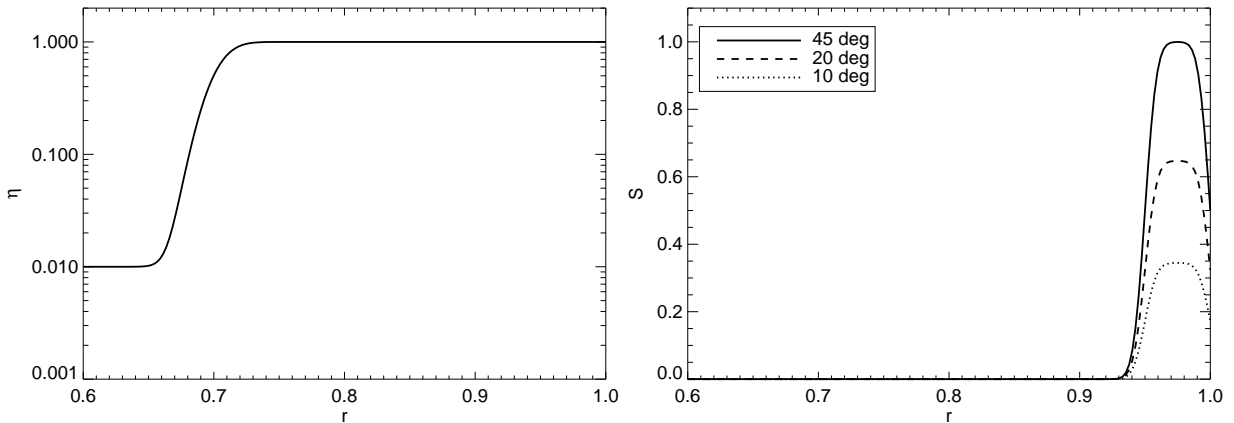


**FIGURE 3.3** – *A gauche* : Contours linéaires de la vitesse angulaire  $\Omega$ . La zone radiative est en rotation solide à la vitesse  $\Omega_c$  alors que la zone convective est soumise à une rotation différentielle avec les pôles tournant plus lentement que l'équateur à une vitesse  $\Omega(\theta = 0) = (1 - c_2)\Omega(\theta = \frac{\pi}{2})$ . Les tirets marquent l'emplacement de la tachocline en  $r = r_c$  et de l'équateur en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . *A droite* : Profil radial de  $\Omega$  pour  $\theta = \{0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\}$  en traits plein, pointillés, tirets et mixtes respectivement.

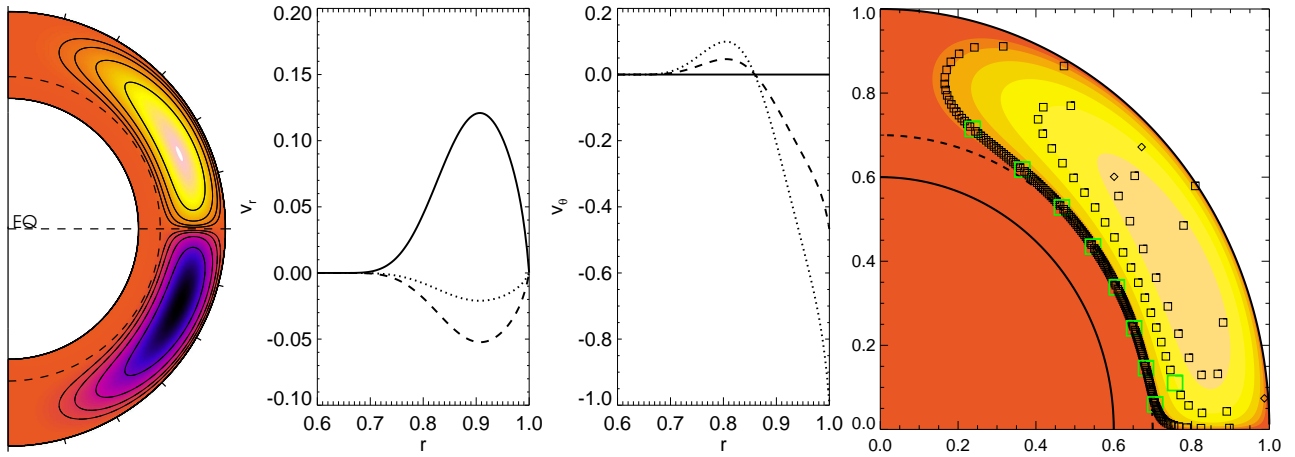
Si le nombre dynamo est suffisamment élevé, l'énergie magnétique va croître de manière exponentielle. En réalité, divers processus physiques peuvent saturer de manière non linéaire le champ magnétique. En l'absence d'une quelconque rétroaction dans ce modèle, il apparaît donc nécessaire d'introduire un terme non linéaire qui va saturer artificiellement la dynamo. C'est le rôle du terme  $S_{\text{sat}}$  :

$$S_{\text{sat}} = \left[ 1 + \left( \frac{B_\phi(r_c, \theta, t)}{B_0} \right)^2 \right]^{-1} \quad (3.19)$$

où on a choisi  $B_0 = 10^5$  G, ce qui correspond à l'énergie d'équipartition, c'est-à-dire lorsque la densité d'énergie magnétique est égale à la densité d'énergie cinétique locale. Cette non-linéarité sera traitée de manière plus réaliste au Chapitre 4.



**FIGURE 3.4** – Profil radial de la diffusivité et du terme  $S$  intervenant dans l'équation (3.12a) pour plusieurs colatitudes données.



**FIGURE 3.5** – À gauche : Contours logarithmiques de la fonction de courant  $\psi$ . Dans l’hémisphère nord (respectivement sud), la fonction  $\psi$  est négative (respectivement positive), signifiant que la circulation méridienne circule dans le sens anti horaire (respectivement horaire). Le maximum de la fonction de courant est choisi de telle sorte que  $v_0$  indique l’amplitude maximum. Au milieu : Profil radial de  $v_r$  et  $v_\theta$  en  $\theta = \{\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\}$ . À droite : En couleurs, idem que le panneau de gauche dans l’hémisphère nord seulement. Chaque carré noir représente la position d’une particule passive lâchée dans l’écoulement tous les ans ; les carrés verts, tous les 20 ans. La ligne en tirets matérialise la localisation de la tachocline et celle en trait plein la limite inférieure du domaine.

La circulation est définie à travers la fonction de courant  $\psi$  définie par l’équation (3.20). Les contours de cette fonction sont représentés sur la Figure 3.5. On peut identifier ces contours au chemin suivi par toute particule advectée par ce champ de vitesse. Lorsque  $\psi > 0$ , l’écoulement tourne dans le sens horaire et inversement lorsque  $\psi < 0$ .

$$\psi = -\psi_0 \left( \frac{r - r_b}{1 - r_b} \right)^2 (\theta - \theta_0) \sin \left( \pi \frac{r - r_b}{1 - r_b} \right) e^{-\left( \frac{r - r_0}{\Gamma} \right)^2} (1 - e^{-\beta_1 r \theta^\epsilon}) (1 - e^{-\beta_2 r (\theta - \frac{\pi}{2})^\epsilon}) \quad (3.20)$$

où  $r_b = 0.65$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\Gamma = 0.15$ ,  $r_0 = 0.76$ ,  $\epsilon = 2.0$ ,  $\beta_1 = 0.316228$ ,  $\beta_2 = 0.3$ . Le choix de ces paramètres assure que le champ respecte bien l’écoulement observé dans le Soleil avec un maximum d’amplitude en  $\theta \simeq \frac{\pi}{4}$  à la surface, i.e. en  $r = 1$ . La constante  $\psi_0$  positive est choisie de telle sorte que le maximum de la vitesse latitudinale soit égal à  $v_0$ . Les composantes latitudinale et radiale de cette vitesse sont calculées à partir de la relation (3.21a) où l’on a supposé une stratification en densité réaliste définie par l’équation (3.21b).

$$\rho \mathbf{v}_p = \nabla \times \left( \frac{\psi}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi \right) \quad (3.21a)$$

$$\rho(r) = \left( \frac{1}{r} - 0.97 \right)^m \quad (3.21b)$$

avec  $m = 1.5$ . Avec un tel choix de paramètres,  $\frac{v_\theta(r=r_c)}{v_\theta(r=1)} \simeq 0.01$ , puis tend vers 0 en dessous de  $r_b$ . Pour avoir une meilleure idée du comportement de la circulation méridienne, on représente dans le panneau de droite de la Figure 3.5, la trajectoire d’une particule fictive lâchée dans l’écoulement. Nous verrons que la vitesse de la circulation méridienne à la BCZ est un élément crucial qui déterminera la capacité du pompage turbulent à influencer la période magnétique. L’effet du pompage sera d’autant plus important que l’amplitude de la circulation méridienne sera faible.

## 3.4 Caractérisation des cycles pour différents taux de rotation

### 3.4.1 Modèle Standard

Pour bien identifier les effets du pompage turbulent, on définit tout d’abord un modèle *standard* (noté S) capable de reproduire le cycle magnétique solaire en l’absence de pompage. On se place dans le modèle à transport de flux de type BL en régime advectif, de façon similaire à de nombreuses études précédentes (Dikpati et al., 2004; Yeates et al., 2008). Comme on souhaite reproduire les caractéristiques d’un cycle solaire, on choisit les paramètres indiqués dans la Table 3.1. Dans chaque cas, le paramètre  $C_s = 70$  a été choisi de telle sorte que l’on soit au dessus du seuil dynamo ( $C_s^{\text{crit}} \simeq 9.6$ ), nous permettant d’étudier le champ magnétique dans un régime dynamo bien établi. On aura vérifié au préalable que le régime stationnaire dépendait peu de sa valeur exacte (tant que l’on se trouve au dessus du seuil dynamo) comme le montre l’équation (3.22). Les autres paramètres sont calibrés sur les observations du Soleil.

**TABLE 3.1** – Résumé des paramètres définis dans les Sections 2.2.4 et 3.3, utilisés pour l’ensemble des simulations. S et R signifient Standard et Référence, c’est-à-dire en l’absence (respectivement en présence) de pompage turbulent. Le nombre qui suit la lettre donne le taux de rotation  $\Omega$  en unité de rotation solaire  $\Omega_\odot$ . Lorsque le chiffre est absent, cela signifie que  $\Omega_0 = 1\Omega_\odot$ . Les paramètres d’advection ( $R_m$ ,  $C_{\gamma r}$  et  $C_{\gamma\theta}$ ) ont été volontairement normalisés à la même valeur de telle sorte que leur amplitude relative puisse être directement estimé.

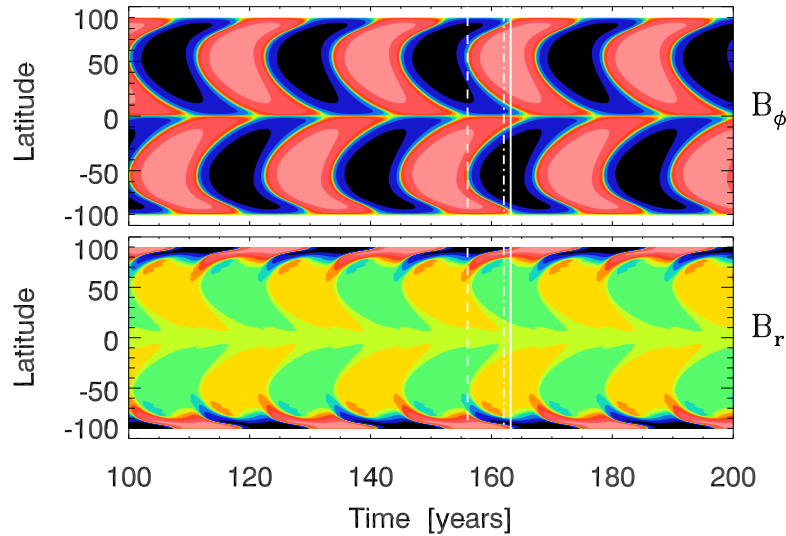
Case	$\frac{C_\Omega}{10^5}$	$\frac{R_m}{10^3}$	$\frac{C_{\gamma r}}{10^3}$	$\frac{C_{\gamma\theta}}{10^3}$	$P_{\text{cyc}}$ (années)	$B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}}$
S	2.78	4.50	0	0	22.5	2.57
R0.7	2.00	2.67	0.0289	0.0723	26.4	1.51
R0.9	2.50	2.41	0.0452	0.113	24.2	0.999
R	2.78	2.30	0.0557	0.139	22.7	0.701
R1.1	3.00	2.22	0.0650	0.163	21.2	0.536
R1.3	3.50	2.07	0.0885	0.221	18.7	0.328
R1.4	4.00	1.95	0.116	0.289	16.3	0.228
R1.6	4.50	1.85	0.146	0.366	14.5	0.174
R1.8	5.00	1.76	0.181	0.452	13.0	0.148
R2.0	5.50	1.69	0.219	0.547	11.7	0.127
R2.5	7.00	1.52	0.354	0.885	9.22	0.104
R2.9	8.00	1.43	0.462	1.16	8.22	0.100
R3.6	10.0	1.29	0.723	1.81	6.76	0.0706
R4.3	12.0	1.19	1.04	2.60	5.14	0.0539
R5.0	14.0	1.11	1.42	3.54	4.51	0.0377

On représente les résultats du cas standard dans un diagramme temps latitude (cf Figure 3.6) dans lequel on montre l’amplitude de la composante toroidale du champ magnétique à la base de la zone convective (panneau du haut), i.e. en  $r = r_c$ , et l’amplitude de sa composante radiale à la surface (panneau du bas), i.e. en  $r = 1.0$ . Le panneau du haut est directement comparable au diagramme papillon solaire de la Figure 1.15 car le champ magnétique toroidal intense créé à la tachocline est a priori à l’origine des régions actives observées à la surface (Fan, 2008; Jouve and Brun, 2009; Nelson et al., 2013b). On retrouve toutes les caractéristiques d’un diagramme papillon solaire décrites à la

Section 1.6.3, c'est-à-dire : période magnétique de 22 ans environ, alternance de polarité entre chaque cycle, polarité opposée entre les deux hémisphères, une branche équatoriale à basses latitudes et une polaire à hautes latitudes. De plus, les relations de phase sont également reproduites avec succès : le champ radial passe d'une polarité négative à positive lorsque le champ toroidal est maximal et positif près de l'équateur. Autrement dit, il y a un décalage de phase de  $\pi/2$  entre le champ poloidal à la surface et le champ toroidal à la BCZ. Cela se traduit sur la Figure 3.6 par la coïncidence proche des traits plein et mixte. La forte branche équatoriale est la signature du sens de la circulation méridienne à la BCZ, qui advecte le champ toroidal vers l'équateur et qui dicte la durée d'un cycle magnétique comme le montre la corrélation suivante, obtenue dans ces simulations :

$$P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.05} s_0^{0.07} v_0^{-0.83} \quad (3.22)$$

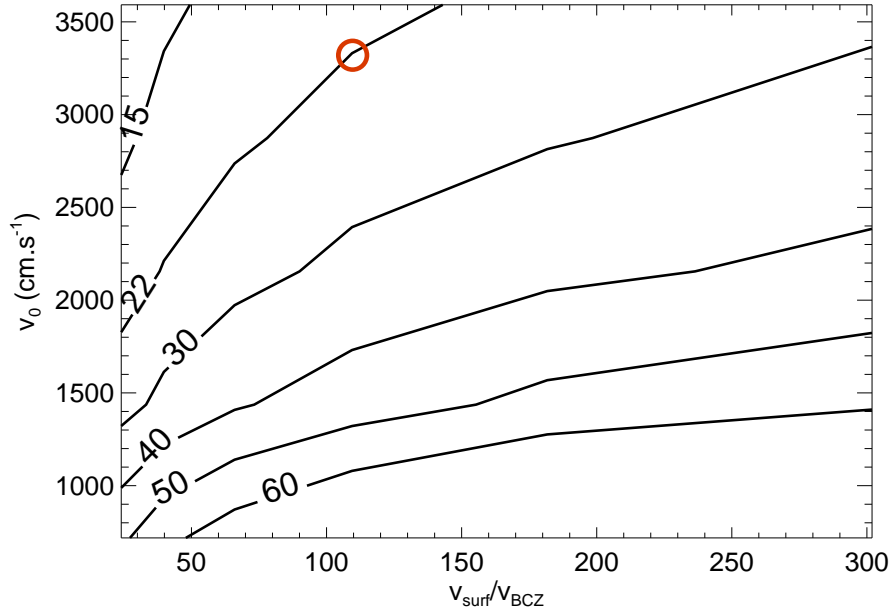
valable dans l'intervalle  $s_0 = [4.7; 100] \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $v_0 = [1200; 4500] \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\Omega_0 = [1.4 \times 10^{-6}; 7.2 \times 10^{-6}] \text{ Hz}$  pour  $\eta_t = 5 \times 10^{10} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ . Lorsque le transport du champ magnétique est dominé par l'advection, il y a une corrélation forte entre  $P_{\text{cyc}}$  et  $v_\theta$  puisque c'est le principal mécanisme capable de transporter le champ magnétique vers l'équateur. Plus précisément, c'est la vitesse à la BCZ qui est crucial. En effet, dans la Figure 3.7, on représente la dépendance de la période magnétique en fonction à la fois de  $v_0$  et du rapport entre la vitesse à la surface  $v_{\text{surf}}$  et la vitesse à la BCZ  $v_{\text{BCZ}}$ . On voit clairement que, pour une même amplitude  $v_0$  donnée (i.e. la vitesse absolue à la surface est fixée), augmenter le rapport  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$  augmente la période magnétique puisque la vitesse absolue  $v_{\text{BCZ}}$  diminue. On retrouve bien le fait que pour un rapport fixé, la période magnétique diminue lorsque  $v_0$  croît.



**FIGURE 3.6** – Diagrammes temps latitude correspondant au cas S du champ toroidal en  $r = r_c$  (panneau supérieur) et du champ radial en  $r = 1$  (panneau inférieur). Les contours rouges (respectivement bleus) indiquent une valeur de champ positive (respectivement négative) et vont du minimum au maximum du champ magnétique, de manière logarithmique, où deux contours successifs couvrent une décade. La ligne vertical en tirets correspond au renversement du champ toroidal à moyenne latitude, celle en trait plein correspond au renversement (de négatif vers positif) du champ radial aux poles et celle en trait mixte aux maximum (positif) du champ toroidal près de l'équateur.

Les récents travaux de Pipin and Kosovichev (2011) et Nandy et al. (2011) confirment en effet que l'amplitude, mais aussi la profondeur de l'écoulement, a une importance capitale sur les cycles magnétiques. Pour retrouver un cycle de 22 ans, on considère  $R_m = 4.5 \times 10^3$ , ce qui correspond à une vitesse à la surface de  $v_0 \simeq 32 \text{ m.s}^{-1}$ . Cette valeur est légèrement supérieure à ce qui est habituellement admis dans les simulations ( $v_0 \simeq 20 \text{ m.s}^{-1}$ ). Cependant, la circulation méridienne est un écoulement

très variable et peut atteindre des vitesses tout à fait comparables à ce qui est admis ici (Basu and Antia, 2010).



**FIGURE 3.7** – Contours représentant la période magnétique en années en fonction de l’amplitude de la circulation méridienne  $v_0$  et du rapport entre la vitesse à la surface et la vitesse à la base de la zone convective (BCZ)  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$ . Le cercle rouge correspond aux valeurs choisies dans le cas standard.

Comme on l’a dit, l’amplitude de la circulation méridienne est le processus dominant qui définit la période du cycle magnétique. Il est donc crucial de savoir comment  $v_0$  varie avec  $\Omega_0$ . Pour cela, on s’appuie sur les simulations numériques 3D de Ballot et al. (2007), Brown et al. (2008) et Augustson et al. (2012) qui ont étudié l’influence du taux de rotation sur la dynamique interne des étoiles de type solaire. On s’attend a priori à ce que l’amplitude de l’écoulement croît avec la rotation. Une étude plus approfondie de l’équation de la vorticité montre en fait que  $v_0$  décroît avec  $\Omega_0$  (cf équation (3.5)) car l’énergie cinétique totale disponible (fixe pour une masse donnée) est transférée de plus en plus aux mouvement longitudinaux au dépend de l’énergie associée à la circulation méridienne. Dans ces travaux 3D, on rappelle que l’amplitude de la circulation méridienne suit la relation (3.3). En admettant donc cette relation, on retrouve que  $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.42}$  dans l’intervalle  $\Omega_0 = [1.0 \times 10^{-6}; 1.5 \times 10^{-5}]$  Hz, en accord avec les résultats de Jouve et al. (2010a).

Comme dit précédemment, nous sommes en présence d’un modèle capable de reproduire avec une bonne fidélité les caractéristiques d’un cycle magnétique solaire, mais qui échouent à reproduire la relation  $P_{\text{cyc}} - P_{\text{rot}}$  à cause de la forte dépendance du cycle à la circulation méridienne, en particulier à la BCZ. Afin d’y remédier, Jouve et al. (2010a) ont incorporé une circulation méridienne multicellulaire comme obtenu dans les simulations de Ballot et al. (2007) et Brown et al. (2008). Dans la suite, nous proposons de garder une circulation unicellulaire, mais en introduisant le pompage turbulent comme un autre processus capable de transporter le champ magnétique de la surface vers et le long de la tachocline. Guerrero and de Gouveia Dal Pino (2008) ont déjà établi quelques propriétés d’un tel mécanisme dans le cas d’une circulation méridienne superficielle. Nous cherchons ici à vérifier que leurs résultats sont extensibles à une circulation méridienne profonde et sous quelle(s) condition(s) le pompage turbulent devient dominant.

### 3.4.2 Modèle Référence

Nous incluons désormais le pompage turbulent dans nos simulations. En principe, ses caractéristiques peuvent être déterminées par des simulations DNS MHD comme dans Tobias et al. (2001). Plusieurs auteurs ont déjà tenté de déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\gamma$  (Ossendrijver et al., 2001; Brandenburg et al., 1990). Néanmoins, la turbulence intense rencontrée au sein de la zone convective solaire ( $R_e \sim 10^{12}$ ) reste un obstacle de taille pour les simulations numériques cherchant à simuler l'intégralité de l'étoile (cf Section 5.2). L'approche champ moyen, complémentaire des simulations DNS, est indispensable si l'on souhaite capturer les effets due à la géométrie sphérique et obtenir la dépendance de ces coefficients dans l'espace. Dans l'attente de leur détermination, nous nous appuyons sur les dernières estimations de Käpylä et al. (2006), qui peuvent être représentées par les fonctions (3.23).

$$\gamma_r = -\frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.715}{0.015} \right) \right] \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 1.02}{0.05} \right) \right] \cos^2(\theta) \quad (3.23a)$$

$$\gamma_\theta = \frac{25\sqrt{5}}{64} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.74}{0.03} \right) \right] \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.94}{0.03} \right) \right] \cos(\theta) \sin^4(\theta) \quad (3.23b)$$

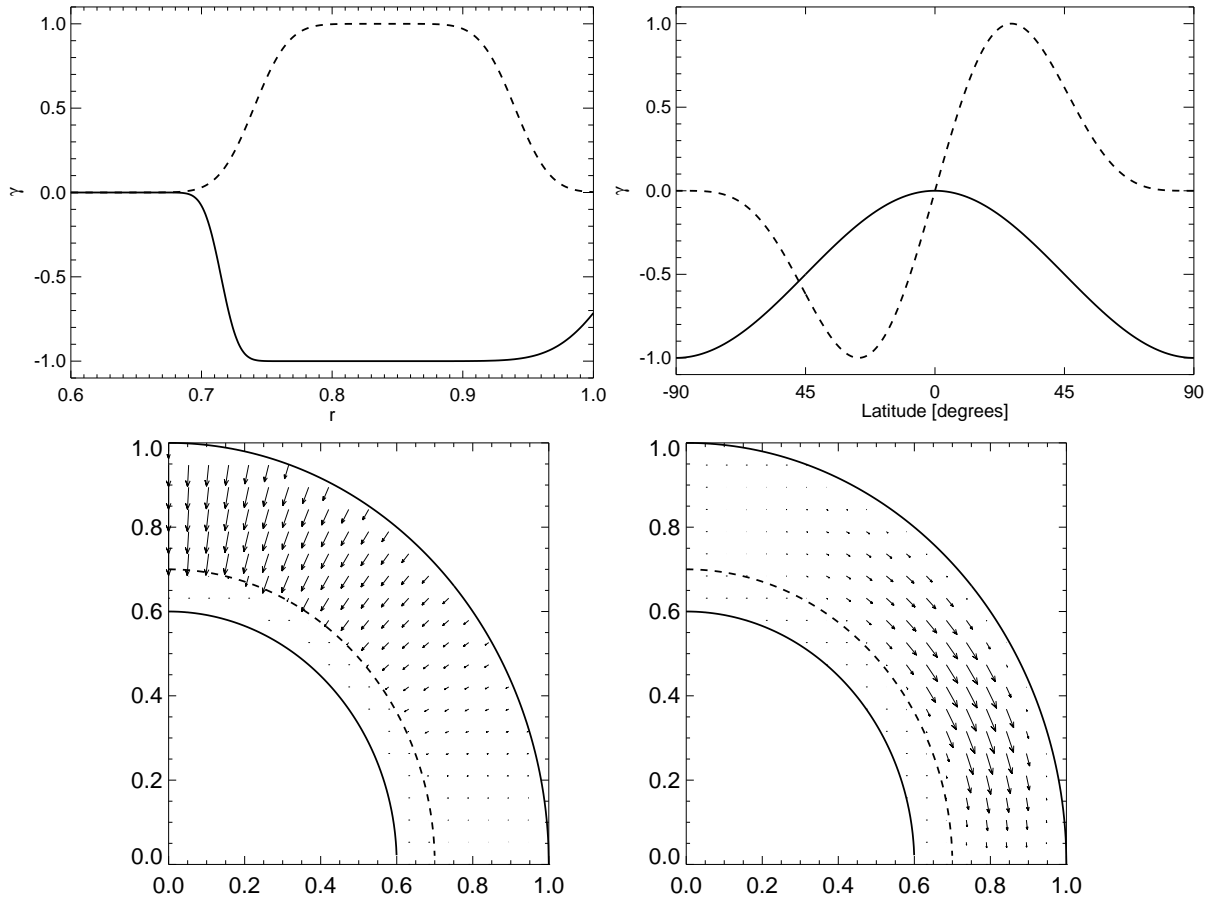
L'amplitude de  $\gamma_r$  est maximale là où les plumes convectives sont le moins déviées de leur trajectoire, c'est-à-dire aux pôles, là où la force de Coriolis est nulle. La composante latitudinale  $\gamma_\theta$  a, quant à elle, un profil radial opposé car issue de la même force. Les deux composantes existent là où la convection existe, et sont donc nulles dans la zone radiative. Leurs champs respectifs sont représentés sur la Figure 3.8.

On l'a vu (cf Figure 3.7), c'est la vitesse de la circulation méridienne à la BCZ qui contrôle principalement la période du cycle magnétique, en l'absence de pompage. En présence de pompage turbulent, un deuxième processus advectif entre en jeu. C'est alors l'importance respective de ces deux processus qui va déterminer la sensibilité de  $P_{\text{cyc}}$  à  $v_0$ ,  $\gamma_r$  et  $\gamma_\theta$ . En effet, en faisant varier le rapport  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$ , on fait varier l'importance de la circulation méridienne. Plus ce rapport est élevé, plus le pompage turbulent a une importance grande devant la circulation méridienne qui a une vitesse de moins en moins grande à la BCZ. On peut voir cet effet dans la Table 3.2 dans laquelle on liste la dépendance de  $P_{\text{cyc}}$  à  $\gamma_{r0}$ ,  $\gamma_{\theta0}$  et  $v_0$  en fonction de  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$ . On voit alors clairement que plus ce rapport est élevé, moins la circulation méridienne a un impact sur  $P_{\text{cyc}}$ .

**TABLE 3.2** – Dépendance de la période du cycle magnétique  $P_{\text{cyc}}$  pour différentes valeurs de  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$ . Les indices  $n$ ,  $m$ ,  $p$  sont les paramètres de la corrélation  $P_{\text{cyc}} \propto \gamma_{r0}^n \gamma_{\theta0}^m v_0^p$ . Les paramètres en rouge sont ceux qui ont été utilisés pour le modèle référence et dans la Section 3.4.3.

Rapport $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$	Indice $\gamma_{r0}(n)$	Indice $\gamma_{\theta0}(m)$	Indice $v_0(p)$
24.0	-0.34	-0.10	-0.50
39.8	-0.33	-0.12	-0.46
66.0	-0.31	-0.14	-0.43
<b>109</b>	<b>-0.30</b>	<b>-0.15</b>	<b>-0.40</b>
182	-0.29	-0.15	-0.38
302	-0.29	-0.14	-0.34

Comme précédemment, on définit un cas *Référence* cherchant à reproduire le cas solaire. Dans le Soleil, on s'attend à ce que le pompage turbulent ait une amplitude  $\gamma_{r0} = 40 \text{ cm.s}^{-1}$  et  $\gamma_{\theta0} = 100 \text{ cm.s}^{-1}$  (Käpylä et al., 2006). L'ensemble des paramètres caractérisant le modèle de référence noté R, est donné dans la Table 3.1. En s'appuyant sur les profils donnés par les équations (3.23) représentés sur la

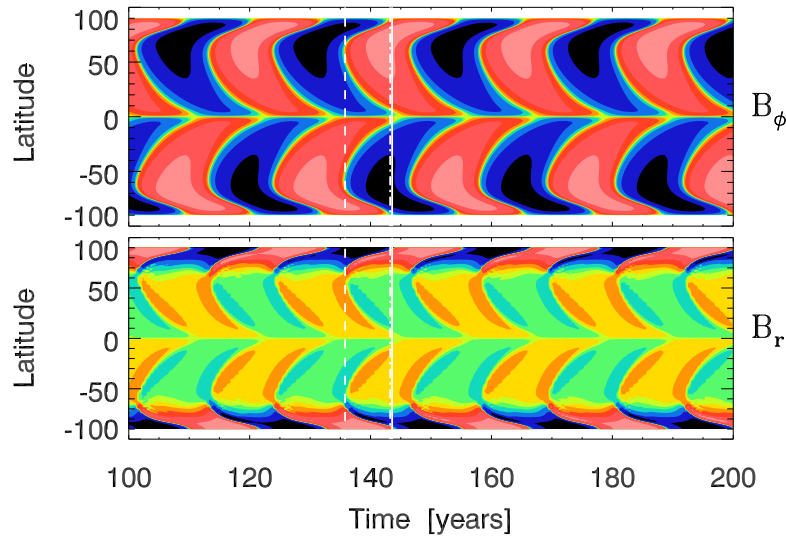


**FIGURE 3.8** – *En haut à gauche* : Variations de  $\gamma_\theta$  (tirets) et de  $\gamma_r$  (plein) en fonction du rayon là où leur amplitude respective est maximale, i.e. en  $\theta = 0$  pour  $\gamma_r$  et en  $\theta = \arccos(1/\sqrt{5})$  pour  $\gamma_\theta$ . *En haut à droite* : Idem que précédemment en fonction de la latitude en  $r = 0.85$  pour les deux composantes. *En bas* : champ vectoriel dans l’hémisphère nord de  $\gamma_r \hat{e}_r$  (à gauche) et de  $\gamma_\theta \hat{e}_\theta$  (à droite).

Figure 3.8, on remarque que  $\gamma_\theta$  est du même signe que la circulation méridienne à la BCZ. Par conséquent, la vitesse d’vection effective est accrue, ce qui nous force à réduire l’amplitude de la circulation méridienne ( $v_0 \simeq 17 \text{ m.s}^{-1}$ ) pour conserver  $P_{\text{cyc}} = 22$  ans, en meilleur accord avec la vitesse moyenne observée, pour un rapport  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}}$  constant. La branche équatoriale présente dans le diagramme temps latitude pour le champ toroidal démarre à des latitudes légèrement supérieures (latitude  $\simeq 65^\circ$ ) au cas Standard. Les régions d’intensité magnétique les plus intenses sont également confinées dans une plus petite région proche des pôles. A la surface, on a une situation opposée : la vitesse effective est plus faible et le champ poloidal est plus étendue vers les basses latitudes. Aux pôles, la composante radiale  $\gamma_r$  advecte efficacement le champ poloidal vers la tachocline, participant également à réduire l’accumulation de champ magnétique à la surface. Cet effet, dans le cas de notre circulation profonde, n’est néanmoins pas aussi évident que dans les modèles de Guerrero and de Gouveia Dal Pino (2008). L’ensemble des caractéristiques du diagramme papillon solaire sont à nouveau bien reproduites comme on peut le voir sur la Figure 3.9.

Pour mieux visualiser le processus advectif dans ce modèle, on montre dans la Figure 3.10 l’évolution du champ poloidal (tracé par  $A_\phi$ ) et du champ toroidal  $B_\phi$ . On y voit clairement le champ poloidal créé à la surface par effet Babcock Leighton, puis advecté en surface par la circulation méridienne vers les pôles. Ensuite, l’action conjointe de la circulation méridienne et du pompage turbulent advectent ce champ vers la tachocline où il est cisailé pour créer un champ toroidal intense. Le chemin que





**FIGURE 3.9** – Diagrammes temps latitude pour le cas R. Le code couleurs est identique à celui de la Figure 3.6.

suit le champ magnétique poloidal est clairement identifiable à la trajectoire de l'écoulement produit par la circulation méridienne (cf Figure 3.3), mettant en avant encore une fois le rôle central joué par l'advection. Dans ce modèle à  $\Omega_0 = 1\Omega_\odot$ , l'amplitude du pumping n'est pas suffisamment élevée pour détourner le champ magnétique de cette trajectoire, comme on peut le voir dans la Table 3.1, ce qui était attendu des valeurs prises par  $C_{\gamma_r}$  et  $C_{\gamma_\theta}$  par rapport à  $R_m$  (cf Table 3.1).

### 3.4.3 Variation du taux de rotation

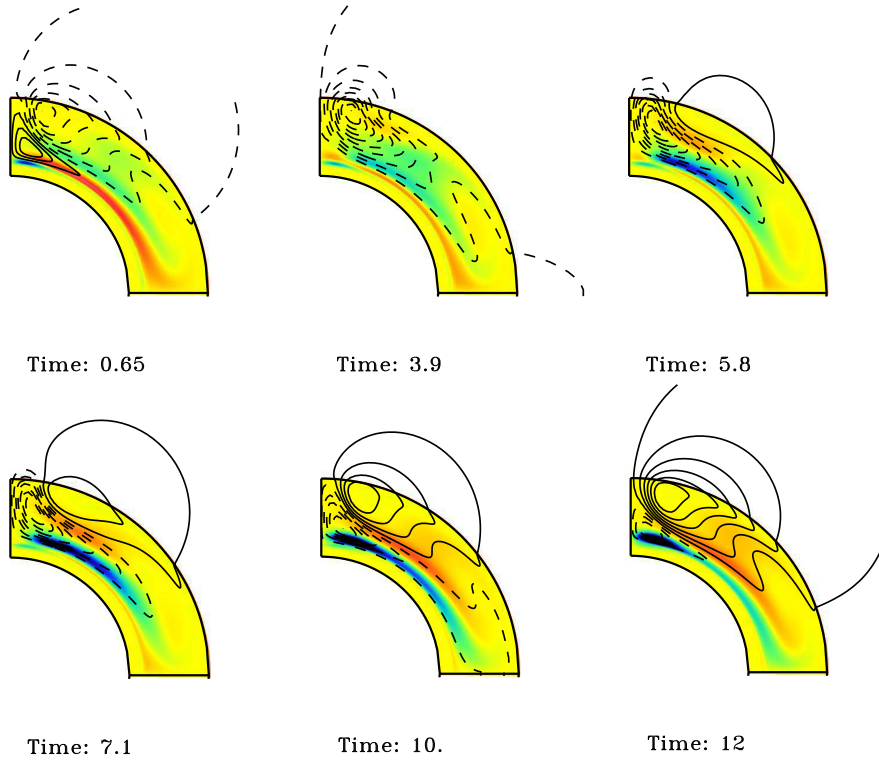
On se demande à présent sous quelle(s) condition(s) le pompage turbulent peut réconcilier les observations avec les modèles dynamo en champ moyen, c'est-à-dire retrouver la relation (3.1) avec  $n \simeq 1$ . Un ajustement de nos données nous donne la dépendance du cycle magnétique  $P_{\text{cyc}}$  dans ces modèles incluant le pompage :

$$P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.40} \gamma_{r0}^{-0.30} \gamma_{\theta 0}^{-0.15} \quad (3.24)$$

valable dans l'intervalle  $v_0 = [1000; 4500] \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $\gamma_{r0} = [20; 100] \text{ cm.s}^{-1}$ ,  $\gamma_{\theta 0} = [50; 300] \text{ cm.s}^{-1}$ . Ce résultat est quantitativement différent de la relation (3.4) (Guerrero and de Gouveia Dal Pino, 2008). Le pompage turbulent a certes un rôle essentiel dans l'établissement de la période magnétique, mais l'importance des différentes composantes est plus équilibrée. Tout d'abord, la circulation méridienne garde une importance comparable au pompage, et  $\gamma_r$  n'a pas le rôle phare qu'attribuent Guerrero and de Gouveia Dal Pino (2008). Ensuite, la composante latitudinale  $\gamma_\theta$  n'a pas un effet négligeable. Cela nous conforte dans l'idée que l'advection le long de la tachocline est un ingrédient crucial dans les modèles de transport de flux de BL. Ces différences sont probablement dues au choix de la profondeur de pénétration de la circulation méridienne, où son amplitude est quasi nulle dans le cas où elle est superficielle comme dans Guerrero and de Gouveia Dal Pino (2008).

Si on suppose que la relation (3.3) reste valable et que le rapport  $\gamma_r/\gamma_\theta$  reste constant, une analyse simple de la relation (3.24) nous montre que pour retrouver la tendance observationnelle, il est nécessaire que le pompage turbulent soit proportionnel à  $\Omega_0^2$ . Les travaux de Tobias et al. (2001) montrent en fait le contraire, i.e. que le pompage diminue avec le taux de rotation. Plus tard, Käpylä et al. (2009a) trouvent au contraire que le taux de rotation n'a presque aucun effet sur l'amplitude du pompage. Ces éléments contradictoires nous laissent penser que la question reste ouverte. Afin de vérifier la véracité



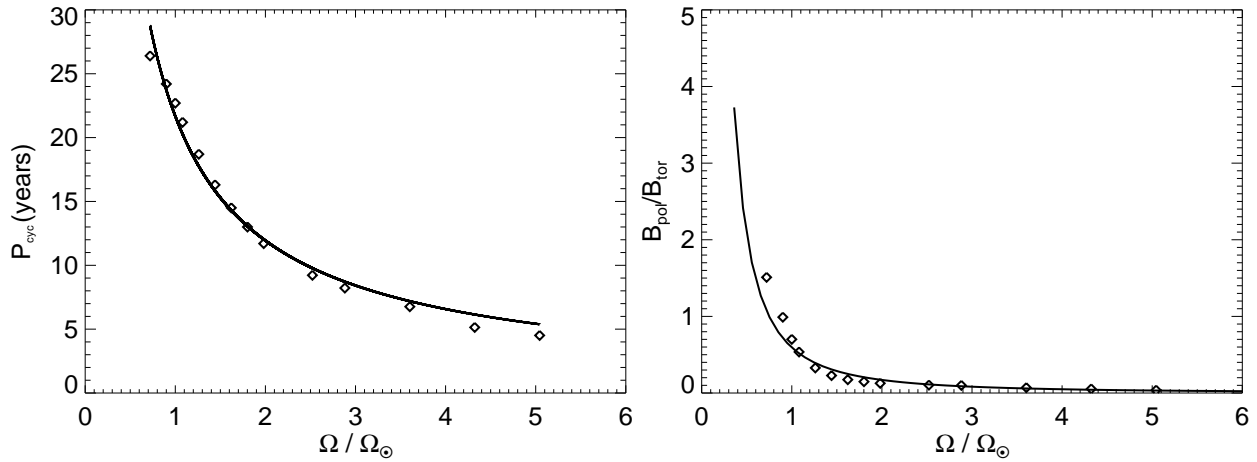


**FIGURE 3.10** – Evolution de  $A_\phi$  (lignes noirs) et de  $B_\phi$  (contours couleurs) pendant une demi période magnétique dans l’hémisphère nord. Les contours rouges (respectivement bleus) indiquent un champ toroidal positif (respectivement négatif). Les lignes en pointillés (respectivement en train plein) indiquent un champ poloidal dans le sens horaires (respectivement dans le sens anti horaire). Le temps est donné en années.

de ces propositions, des simulations numériques 3D MHD globales sont en cours d’élaboration (Matt et al., 2011). Elles devraient permettre à terme d’évaluer l’amplitude de la circulation méridienne et du pompage turbulent pour différents taux de rotation dans les étoiles de type solaire (cf Partie III). Sous l’hypothèse que  $\gamma \propto \Omega_0^2$ , nous retrouvons comme attendu la tendance observationnelle<sup>4</sup>  $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{-0.86}$  (cf Figure 3.11). Notons toutefois que, outre  $\gamma_{r0}$  et  $\gamma_{\theta0}$ , d’autres paramètres peuvent également varier avec le taux de rotation comme, par exemple, l’amplitude du terme source de Babcock Leighton  $s_0$ , même si son influence sur la période magnétique reste particulièrement faible (cf équation (3.22)). Le profil des ingrédients physiques décrits dans la Section 3.3 peut aussi varier. Nous supposons par simplicité que ces derniers restent identiques à tous les taux de rotation, bien qu’il faudrait en principe prendre en compte leurs variations, comme on le verra dans le Chapitre 6.

Rappelons que l’on impose dorénavant  $\gamma_{r0}, \gamma_{\theta0} \propto \Omega^2$ . La Figure 3.11 représente un ajustement par moindres carrés les valeurs de  $P_{\text{cyc}}$  obtenues pour des taux de rotation compris entre  $0.7$  et  $5\Omega_\odot$ . Pour  $\Omega_0 > 5\Omega_\odot$ , les périodes du cycle magnétique ne sont plus clairement définies, ce qui apparaît sur les diagrammes temps latitudes de la 3.12, pour le cas  $\Omega_0 = 5\Omega_\odot$ . Lorsque  $\Omega_0 < 0.7\Omega_\odot$ , le pompage devient négligeable, laissant la circulation méridienne dicter l’accroissement de  $P_{\text{cyc}}$  avec  $\Omega_0$ , comme dans les cas en l’absence de pompage. Dans cette même Figure, outre le cas précédemment cité, on donne les diagrammes temps latitude des cas  $\Omega_0 = 0.7\Omega_\odot$  et  $\Omega_0 = 3\Omega_\odot$ , échantillon représentatif de l’ensemble des simulations réalisées. On y voit, comme attendu, les effets croissants (décrits pour le cas R) du

4. La valeur donnée ci-après résulte d’un ajustement linéaire d’une série de simulations dans laquelle on a fait varier les paramètres  $\gamma_{r0}, \gamma_{\theta0}$ , et  $v_0$ , ce qui est proche de ce qu’on aurait trouver analytiquement à partir des équations (3.24), (3.3) et de l’hypothèse  $\gamma \propto \Omega_0^2$ .

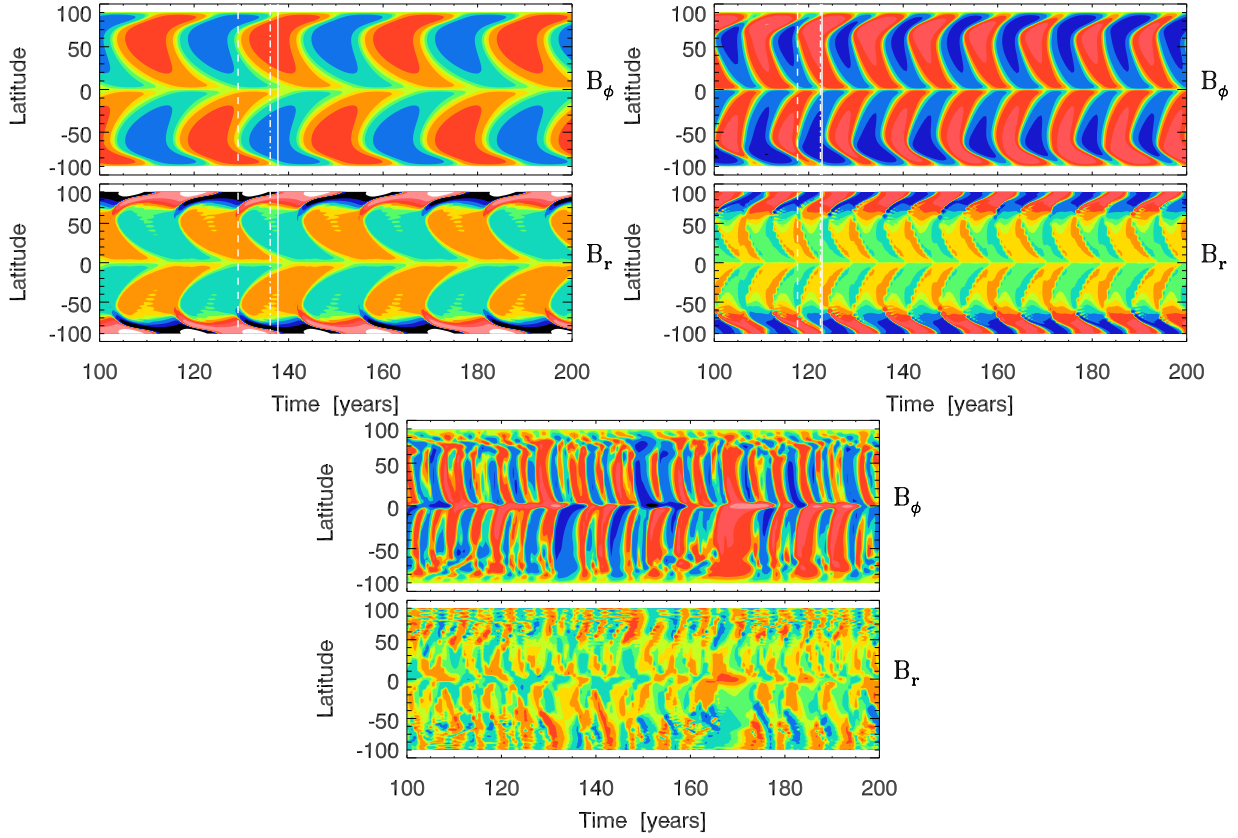


**FIGURE 3.11** – Période du cycle magnétique (à gauche) et  $B_{\text{pol}}(\text{surf})/B_{\text{tor}}(\text{BCZ})$  (à droite) en fonction du taux de rotation dans les modèles incluant le pompage turbulent suivant  $\gamma \propto \Omega^2$ . La courbe est un ajustement par la méthode des moindres carrés des données simulées.

pompage alors que le taux de rotation augmente. La branche équatoriale devient de plus en plus courte et la disparité pôle-équateur se fait de plus en plus faible. Cependant, pour les rotations les plus rapides ( $\Omega_0 > 4\Omega_{\odot}$ ), la période devient de moins en moins définie à cause d'intermittences croissantes. Ces périodicités multiples ont pour origine les boucles dynamo ( $B_{\text{pol}}^+ \rightarrow B_{\text{tor}}^- \rightarrow B_{\text{pol}}^-$ ) éphémères générées par le transport de champ par le pompage turbulent qui court-circuite la circulation méridienne. C'est la raison pour laquelle les plus hautes rotations ne suivent pas aussi précisément la tendance de leurs consœurs.

D'autre part, on remarque l'apparition d'une modulation en amplitude et en période du cycle magnétique dès que  $\Omega_0 = 2\Omega_{\odot}$  (cf [Figure 3.12](#)). On ne peut cependant pas identifier cette modulation aux cycles de Gleissberg (cf [Section 1.6](#)). En effet, dans les modèles 2D en régime cinématique, comme c'est le cas ici, la force de Lorentz exercée par le champ magnétique sur le champ de vitesse (l'effet Malkus Proctor que nous étudierons plus en détails dans le [Chapitre 4](#)) n'est pas incluse. Or, il a été montré qu'une telle rétroaction avait une importance majeure sur les modulations de long terme ([Phillips et al., 2002](#)) dont on peut voir un exemple dans la [Figure 4.3](#), mais aussi par exemple sur les oscillations torsionnelles ([Rempel, 2006](#)) et les intermittences ([Moss and Brooke, 2000](#)). Dans nos simulations, les modulations et les intermittences sont dues au pompage turbulent qui concurrence la circulation méridienne. Ainsi, la phase entre  $B_{\text{pol}}$  et  $B_{\text{tor}}$  devient de plus en plus altérée jusqu'à la disparition d'un cycle magnétique bien identifié. Cette perte de cohérence ne cesse de croître avec le taux de rotation (à cause du choix  $\gamma \propto \Omega_0^2$ ). Les valeurs de  $C_{\gamma_r}$  et  $C_{\gamma_\theta}$  deviennent comparables à  $R_m$ , i.e. le pompage turbulent devient un processus advectif aussi important que la circulation méridienne déviant le champ du cycle imposé par la circulation méridienne (cf [Figure 3.10](#)). En conséquence, le diagramme papillon perd quasiment toutes ses caractéristiques grandes échelles au profit de très petites structures, comme on peut le voir sur le panneau inférieur de la [Figure 3.12](#). On ne distingue alors quasiment plus la branche polaire de la branche équatoriale et l'amplitude du champ magnétique est quasi-homogène des pôles jusqu'à l'équateur. A très hautes latitudes ( $\theta < 40^\circ$ ), les variations sont particulièrement rapides car la composante radiale du pompage turbulent y est très élevée. Dans ces cas à hautes rotations, on se trouve en présence d'un régime advectif, non plus dominé par la circulation méridienne, mais par le pompage turbulent, formant une nouvelle classe dans les modèles à transport de flux de type Babcock Leighton.

On s'intéresse maintenant au rapport entre la valeur maximale du champ poloidal à la surface et celle du champ toroidal à la BCZ,  $B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}}$ . Nous trouvons que ce rapport décroît avec le taux de

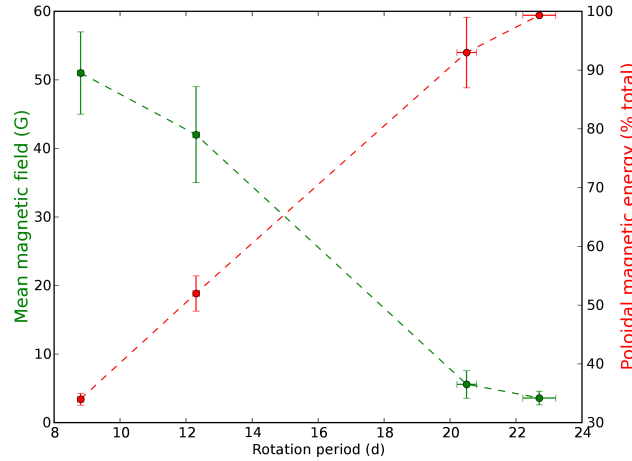


**FIGURE 3.12** – Diagrammes temps latitudes pour trois cas représentatifs des solutions obtenues :  $0.7$ ,  $2.0$  et  $5.0\Omega_{\odot}$ . Toutes les figures partagent le même code couleur : contours logarithmiques compris entre  $-5 \times 10^3$  G et  $5 \times 10^3$  G pour  $B_r$  et entre  $-9 \times 10^5$  G et  $9 \times 10^5$  G pour  $B_{\phi}$ . Nous montrons les relations de phase uniquement pour les cas  $0.7$  et  $2.0\Omega_{\odot}$  car on ne peut les définir pour les rotations les plus élevées.

rotation ( $B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}} \propto \Omega^{-1.80}$ ) comme on peut le voir sur la [Figure 3.11](#). Ce résultat est en accord avec les observations d'étoiles de type solaire de [Petit et al. \(2008\)](#) dans lesquelles les étoiles en rotation rapide exhibent une composante toroidale forte à leur surface alors que le champ est principalement poloidal dans les étoiles les plus lentes (cf [Figure 3.13](#)). Nos valeurs sont systématiquement inférieures, mais cela est dû au fait que nous avons choisi  $B_{\text{tor}}$  à la BCZ (nous ne pouvons pas prendre sa valeur à la surface à cause de la condition limite qui impose  $B_{\text{tor}} = 0$ ), c'est-à-dire là où il est généré et donc là où il est le plus intense. Les observations n'ont au contraire accès qu'à sa valeur plus faible de surface. Pour évaluer la valeur du champ magnétique toroidal de surface, une première approche très simple serait de prendre sa valeur dans une couche inférieure. Par exemple, on estime que le rapport typique  $B_{\text{tor}}(r = r_c)/B_{\text{tor}}(r = 0.98) \simeq 60$ .

### 3.5 Conclusion et perspectives

Le but de cette étude était d'étudier les raisons pour lesquelles les modèles 2D en dynamo champ moyen dit de transport de flux prévoient une période de cycle magnétique qui croît avec le taux de rotation contrairement aux observations ([Saar, 2009](#); [Wright et al., 2011](#)), et d'y proposer une solution. Cette étude s'inspire alors des simulations 3D pour modéliser la dépendance de la circulation méridienne au taux de rotation. Nous confirmons les résultats de [Jouve et al. \(2010a\)](#) qui montrent que ce comportement est dû à la très large influence de la circulation méridienne et que la relation



**FIGURE 3.13** – Observations de l’amplitude absolue moyenne du champ magnétique (en vert) et fraction de l’énergie magnétique poloidale par rapport à l’énergie magnétique totale (en rouge) en fonction de la période de rotation. Crédits : [Petit et al. \(2008\)](#).

$P_{\text{cyc}} - P_{\text{rot}}$  (3.1) ne peut être reproduite à moins qu’une circulation méridienne multicellulaire ne soit envisagée.

Nous avons proposé d’introduire le pompage turbulent comme alternative, processus capable de supplanter la circulation méridienne dans l’établissement de la période magnétique ([Guerrero and de Gouveia Dal Pino, 2008](#)). Dans nos modèles de transport de flux de type Babcock Leighton avec le code STELEM dans le régime advectif, nous avons tout d’abord réalisé un modèle *Standard* en absence de pompage mais produisant les caractéristiques solaires. Dans de tels modèles, la période magnétique  $P_{\text{cyc}}$  est effectivement très sensible à l’amplitude de la circulation méridienne  $v_0$  ( $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.05} s_0^{0.07} v_0^{-0.83}$ ), et ainsi incapable de reproduire les tendances observationnelles. En présence de pompage turbulent, l’amplitude de la circulation méridienne n’est plus le seul processus capable d’influencer  $P_{\text{cyc}}$ . Dans le cas d’une circulation méridienne qui pénètre profondément jusqu’à la tachocline avec une vitesse ( $\sim 0.2 \text{ m.s}^{-1}$ ), c’est-à-dire un contraste de vitesse de  $\sim 109$  avec la surface, on obtient une dépendance du cycle  $P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.40} \gamma_{r0}^{-0.30} \gamma_{\theta 0}^{-0.15}$ . Les observations ne peuvent alors être reproduites que si  $\gamma \propto \Omega_0^2$ , ce qui n’a pas encore été confirmé par les simulations 3D cartésiennes ([Käpylä et al., 2009a](#); [Tobias et al., 2001](#)). Cependant, des simulations 3D MHD en géométrie sphérique sont actuellement en cours de développement pour vérifier cette hypothèse (cf Partie III et IV).

Une autre caractéristique remarquable des modèles en présence de pompage turbulent est la réduction de la forte concentration de champ magnétique de surface près des pôles. D’un côté, la composante radiale  $\gamma_r$  tracte efficacement le champ poloidal de la surface vers la tachocline. De l’autre, la composante latitudinale  $\gamma_\theta$  qui est dirigée en tout point vers l’équateur (et donc aussi à la surface), réduit la quantité de champ magnétique advecté par la circulation méridienne vers les pôles. Alors que le taux de rotation augmente, le pompage croît quadratiquement, accentuant cet effet jusqu’à ce que le champ magnétique de surface soit distribué de manière quasi-homogène en latitude. Cependant, aux plus hauts taux de rotation ( $\Omega_0 > 4\Omega_\odot$ ), le diagramme papillon devient largement affecté par le pompage turbulent qui est devenu le principal processus transportant le champ magnétique au cœur de la zone convective. On constate alors la disparition des branches équatoriale et polaire, au profit de petites structures émergeant des cycles dynamos éphémères ainsi produits. Nous entrons alors dans un nouveau régime dynamo dans lequel l’advection n’est plus dominée par la circulation méridienne, mais par le pompage turbulent ; et possédant des caractéristiques à grandes échelles différentes de celles du Soleil. De futures observations plus détaillées du champ magnétique pourraient vérifier si de telles caractéristiques sont observées dans des analogues solaires.

Bien que l'introduction de ce nouvel ingrédient soit prometteur au regard de notre étude, l'amplitude du pompage turbulent nécessaire aux hautes rotations ( $\gamma \simeq 10 \text{ m.s}^{-1}$  pour  $5 \Omega_{\odot}$ ) sont plus élevées que ce qui a été obtenu par les simulations DNS. Une possibilité serait de joindre les deux solutions proposées au sein d'un même modèle, c'est-à-dire le pompage avec une circulation méridienne multicellulaire. Cette dernière apparaît dans les simulations 3D globales (Brun and Toomre, 2002; Ballot et al., 2007; Brown et al., 2008) dans lesquelles elles restent cohérentes pendant plusieurs années avant de voir leurs structures modifiées. Ces résultats sont supportés par les observations obtenues sur le Soleil par l'héliosismologie (Haber et al., 2002; Zaatari et al., 2006; Zhao et al., 2012).

L'étude du magnétisme stellaire en dynamo champ moyen permet d'utiliser les données observationnelles extra-solaires disponibles, à l'image de ce travail dans lequel nous avons vu comment la période du champ magnétique pouvait dépendre des paramètres physiques. Tous les résultats décrits ont été publiés dans Do Cao and Brun (2011). Une telle étude menée avec des simulations 3D MHD est pour le moment extrêmement coûteuse en temps de calcul ( $> 10 \text{ Mh}$ ) et complexe à analyser (Brown et al., 2011), mais une première tentative a été menée dans la Partie III. Néanmoins, nous avons vu à quel point la combinaison complexe de plusieurs processus physiques devaient être pris en considération pour reproduire l'ensemble des observations. Afin par exemple de traiter de manière plus réaliste la saturation du champ magnétique, nous allons introduire la rétroaction du champ magnétique grande échelle sur le champ de vitesse, l'effet Malkus Proctor (cf Chapitre 4). Ceci devrait aussi nous permettre de capturer les modulations de long terme inhérentes à cette non linéarité (Moss and Brooke, 2000).



# Astronomical Notes

## Astronomische Nachrichten

Founded by H. C. Schumacher in 1821

### Editors

K. G. Strassmeier (Potsdam/Editor-in-Chief),  
A. Brandenburg (Stockholm), G. Hasinger (Garching),  
R.-P. Kudritzki (Honolulu), T. Montmerle (Grenoble),  
H. W. Yorke (Pasadena)

 **WILEY-VCH**

**REPRINT**

# Effects of turbulent pumping on stellar activity cycles

O. Do Cao\* and A.S. Brun

Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/Irfu Université Paris-Diderot CNRS/INSU, 91191 Gif-sur-Yvette, France

Received 2011 Oct 5, accepted 2011 Oct 27

Published online 2011 Dec 12

**Key words** methods: numerical – stars: activity – stars: interiors – stars: magnetic fields – Sun: interior – Sun: rotation

Stellar magnetic activity of solar like stars is thought to be due to an internal dynamo. While the Sun has been the subject of intense research for refining dynamo models, observations of magnetic cyclic activity in solar type stars have become more and more available, opening a new path to understand the underlying physics behind stellar cycles. For instance, it is key to understand how stellar rotation rate influences magnetic cycle period  $P_{\text{cyc}}$ . Recent numerical simulations of advection-dominated Babcock Leighton models have demonstrated that it is difficult to explain this observed trend given a) the strong influence of the cycle period to the meridional circulation amplitude and b) the fact that 3D models indicate that meridional flows become weaker as the rotation rate increases. In this paper, we introduce the turbulent pumping mechanism as another advective process capable also of transporting the magnetic fields. We found that this model is now able to reproduce the observations under the assumption that this effect increases as  $\Omega^2$ . The turbulent pumping becomes indeed another major player able to circumvent the meridional circulation. However, for high rotation rates ( $\Omega \simeq 5\Omega_{\odot}$ ), its effects dominate those of the meridional circulation, entering a new class of regime dominated by the advection of turbulent pumping and thus leading to a cyclic activity qualitatively different from that of the Sun.

© 2011 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

## 1 Introduction

### 1.1 Magnetic cycles in Sun and stars

The Sun exhibits a magnetic period of about 22 years. Observations based on the surface activity seen in Ca II-HK emission lines in the infrared and X-ray flux (Saar 2009) revealed the existence of such cycles with comparable periods (from 5 to 25 years) in solar like stars, i.e. constituted of a deep convective envelope and a radiative interior. The availability of more and more data on the magnetism of G&K stars provide us a new insight in understanding the global scale generation of their magnetic fields. This magnetism and regular activity is thought to be due to a magnetic dynamo operating in the bulk and at the edges of the convection zone (Baliunas et al. 1996; Jouve et al. 2010a; Nandy 2004; Saar & Brandenburg 1999).

In order to complement costly full 3D magnetohydrodynamical (MHD) simulations, a useful approach has been to make use of the mean field dynamo theory Moffatt (1978). This method has the advantage that it only deals with the large scale magnetic field, assuming some parametrization of the underlying small scale turbulence and magnetism. In these theories, the toroidal field is generally assumed to be generated at the base of the convection zone (BCZ) in a region called the tachocline, where both a radial and latitudinal shear act. What is more poorly known though is the source of the poloidal field to close the dynamo loop (i.e.  $B_{\text{pol}} \rightarrow B_{\text{tor}} \rightarrow B_{\text{pol}}$ ). Among the various existing

mechanisms, one of the most promising one is the Babcock Leighton (BL) mechanism first proposed by Babcock (1961) and further elaborated by Leighton (1969). In BL models, the poloidal field is generated at the surface by the transport and decay of tilted bipolar magnetic regions which are formed by twisted buoyant magnetic flux ropes developed at the tachocline (Browning et al. 2006; Jouve & Brun 2009). Synoptic magnetographic monitoring over solar cycles 21 and 22 has offered strong evidence for such dynamo action (Dasi-Espuig et al. 2010; Wang et al. 1989, 1991). The BL flux transport dynamo models have thus been recently the favored one and have demonstrated some success at reproducing solar observations assuming either an advection (e.g. Dikpati & Charbonneau 1999) or a diffusion dominated (e.g. Yeates et al. 2008) regime for the transport of field from the surface down to the tachocline. Alternative  $\alpha$  effects such as helical turbulence may also be used in mean field dynamo models (Charbonneau 2010) but we will not do so here.

In the past decades, dynamo action has been studied preferentially on the Sun, but some works have addressed the question of the applicability of such models to other solar type stars which possess different rotation rates and activity levels (Baliunas et al. 1996; Noyes et al. 1984). One difficulty of such observational programs is that they require long term observations since stellar cycle periods are likely to be commensurate to the solar 11-yr sunspots cycle period (or 22-yr for a full cycle including two polarity reversals of the global poloidal field). The biggest survey to date is from Mt. Wilson (Saar 2009), but gathered data

\* Corresponding author: olivier.do-cao@cea.fr

from the literature are now available for solar type stars with enough statistics (Wright et al. 2011). The systematic analysis of these data revealed that the cycle period is shorter as the star rotates faster and that above a certain rotation rate the X-ray luminosity saturates (see below). The pioneering work of Noyes et al. (1984) found that  $P_{\text{cyc}} \propto P_{\text{rot}}^n$ , with  $n = 1.25 \pm 0.5$ . However, Brandenburg et al. (1998) argued that an “Active” (with  $n = 0.8$ ) and “Inactive” (with  $n = 1.15$ ) branches, segregating respectively Young and old stars, could actually coexist. The Sun is found to actually lie in between. These scalings take into account the existence of a primary (Hale) cycle and a secondary (Gleissberg) cycle. However, saturation of the X-ray luminosity limits this scaling to moderate rotation rates (Pizzolato et al. 2003; Wright et al. 2011). For G type stars this saturation is found for rotation rate above  $35 \text{ km s}^{-1}$ , for K type stars at about  $10 \text{ km s}^{-1}$  and for M dwarfs around  $3\text{--}4 \text{ km s}^{-1}$  (Browning 2008; Reiners et al. 2009). How stellar magnetic flux scales with rotation rate is thus also important to understand since it tells us how the magnetic field generated by dynamo action inside the stars emerges and imprints the stellar surface (Rempel 2008) and if it actually saturates.

In the framework of BL flux transport models including a meridional circulation (MC), the  $P_{\text{cyc}} - P_{\text{rot}}$  relationship can be reproduced only if the meridional flow is proportional to the rotation rate of the star (Charbonneau & Saar 2001; Dikpati et al. 2001; Nandy 2004; Nandy & Martens 2007). However recent theoretical work by Ballot et al. (2007) and Brown et al. (2008) indicate instead that the amplitude of the meridional flow weakens as the rotation rate is increased. The recent work of Jouve et al. (2010a) (hereafter JBB2010) shows indeed that with such scaling, they cannot recover the observational trend of a shorter cycle period for faster rotation rates, unless a multicellular MC flow is assumed. We wish here instead to explore the influence of the turbulent pumping using a simple unicellular MC without invoking a more complex pattern.

## 1.2 Turbulent pumping in stellar dynamo

Magnetic pumping refers to transport of magnetic fields in convective layers that does not result from bulk motion. One particular case is turbulent pumping. In inhomogeneous convection due to density stratification, convection cells take the form of broad hot upflows surrounded by a network of downflow lanes (Cattaneo et al. 1991; Miesch et al. 2008). In such radially asymmetric convection, numerical simulations show that the magnetic field is preferentially dragged downward (Tobias et al. 2001). This effect has been demonstrated to operate in the bulk of the solar convection zone. A significant equatorward latitudinal component also arise when rotation becomes important, i.e. when the Rossby number is less than unity. Turbulent pumping speeds of a few  $\text{m s}^{-1}$  can be reached according to the numerical simulations of Käpylä et al. (2006). Therefore, its effects are expected to be comparable to those of meridional circulation.

In spite of those results, the effects of turbulent pumping rarely have been considered in mean field models. As the latter were able to reproduce rather well the large scale magnetic field using only the alpha effect and differential rotation to drive the dynamo, the pumping effect was thought to be an unnecessary complication.

A first approach showing the importance of pumping in the solar cycle was made by Brandenburg et al. (1992). Since then, turbulent pumping has been a useful approach to tackle the problem of storage of magnetic fields. Indeed, for magnetic flux ropes to be buoyantly unstable and to emerge at the surface to form bipolar magnetic region with the appropriate tilt, numerical simulations have shown that their strength must be as high as  $10^4\text{--}10^5 \text{ G}$  (Choudhuri & Gilman 1987; Fan 2004; Jouve & Brun 2007a). One important limitation of this scenario is that  $10^5 \text{ G}$  represents a magnetic energy density higher by an order of magnitude than the kinetic energy density, i.e. one needs to create super equipartition magnetic structures. Therefore, a stable layer is required to store and amplify the magnetic fields. For this process to occur, differential rotation must be able to develop intense toroidal magnetic fields either within the tachocline or in the convection envelope. Pumping could be the transport needed to get the poloidal field down to the tachocline and could also maintain strongly buoyant structures from rising, thus helping them to become even stronger.

More interestingly in the regard of our work, turbulent pumping have shown remarkable properties regarding stellar cycles. Guerrero & de Gouveia Dal Pino (2008) (hereafter GdG2008) have demonstrated that the magnetic cycle period  $P_{\text{cyc}}$  is no longer dominated by the meridional flow speed  $v_0$  but instead by the radial turbulent pumping  $\gamma_r$  following the relation:

$$P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.12} \gamma_r^{-0.51} \gamma_\theta^{-0.05} \quad (1)$$

available in the range  $v_0 = [500; 3000]$ ,  $\gamma_{r0} = [20; 120]$ ,  $\gamma_{\theta 0} = [60; 140]$  in  $\text{cm s}^{-1}$ . Another interesting feature of this model is that the surface magnetic field no longer shows the strong concentration in the polar region that usually characterizes Babcock Leighton dynamo solutions operating in the advection dominated regime. This can be traced primarily to the efficient downward turbulent pumping that subducts the poloidal field as it is carried poleward by the meridional flow.

With the STELEM code, we aim to study the effect of turbulent pumping on  $P_{\text{cyc}}$  and to see under which conditions the  $P_{\text{cyc}} - P_{\text{rot}}$  relationship can be recovered. The paper is organised in the following manner. In Sect. 2, we describe the equations, the initial and boundary conditions, the ingredients of the model and the standard case in which the turbulent pumping is *not* included. Section 3 shows how the dynamo model behaves in the presence of turbulent pumping and we conclude in Sect. 4.



## 2 The model

### 2.1 The model equation

To model the stellar global dynamo operating in solar like stars, we start from the hydromagnetic induction equation, governing the evolution of the magnetic field  $\mathbf{B}$  in response to advection by a flow field  $\mathbf{V}$  acting against the magnetic dissipation characterised by the molecular magnetic diffusivity  $\eta_m$ :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta_m \nabla \times \mathbf{B}). \quad (2)$$

As we are working in the framework of mean field theory, we are interested in the large-scale magnetic field on time scales longer than the turbulent time scale. We express both magnetic and velocity fields as a sum of a mean component (usually defined as a longitudinal average) and small-scale fluctuating component. For instance, the magnetic field is decomposed as:

$$\mathbf{B} = \langle \mathbf{B} \rangle + \mathbf{b}. \quad (3)$$

Upon this separation and averaging procedure, the induction equation for the mean component becomes

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \mathbf{B} \rangle}{\partial t} &= \nabla \times (\langle \mathbf{V} \rangle \times \langle \mathbf{B} \rangle) + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{b}) \\ &\quad - \nabla \times (\eta_m \nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle). \end{aligned} \quad (4)$$

We drop now the averaging symbol  $\langle \rangle$  for the sake of clarity in the rest of the paper. A closure relation must then be used to express the mean electromotive force (emf)  $\mathbf{E} = \langle \mathbf{v} \times \mathbf{b} \rangle$  in terms of mean magnetic field, leading to a simplified mean-field equation. If the mean magnetic field varies slowly in time and space, the emf can be represented in terms of  $\mathbf{B}$  and its gradients

$$\mathcal{E}_i = a_{ij} B_j + b_{ijk} \frac{\partial B_j}{\partial x_k} + \dots, \quad (5)$$

where  $a_{ij}$  and  $b_{ijk}$  are in the general case tensors containing the transport coefficients, and the dots indicate that higher order derivatives can be taken into account. Summation over repeated indices is assumed. The tensors  $a_{ij}$  and  $b_{ijk}$  cannot, in general, be expressed from first principles due to the lack of a comprehensive theory of convective turbulence. In the kinematic regime where the magnetic energy is negligible in comparison to the kinetic energy, the most simple approximation is to neglect all correlations higher than second order in the fluctuations. This is the so-called first order smoothing approximation (FOSA). In the previous works (see Charbonneau 2010, for a recent review), they consider the simple case of isotropic turbulence, the tensor  $a_{ij}$  reduces into a single scalar giving rise to the  $\alpha$ -effect. However, we consider in this paper the full tensor non-isotropic case for  $a$ . The emf can then in general be written as

$$\mathcal{E} = (\alpha \mathbf{B} + \gamma \times \mathbf{B}) - \beta \nabla \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

where  $\alpha$  is a scalar referring to the standard  $\alpha$ -effect. As we work with BL models, we assume instead the poloidal field to be generated at the surface, so that we will replace the  $\alpha \mathbf{B}$  term by an non local source term  $S$  (details are described below). The term  $\gamma$  is the turbulent pumping and  $\beta$  is defined such that  $b_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$  (with  $\epsilon_{ijk}$  is the Levi-Civita tensor).

As  $\gamma$  and  $\beta$  originates from the same velocity field, they both in principle depend on  $\mathbf{v}$  (see Krause & Rädler 1980). In complex configurations as rotating convective spherical shells, it is not clear though how they are related in spite of numerous efforts in determining precisely the turbulent transport coefficients (e.g. Brandenburg et al. 1990; Cattaneo & Hughes 2006; Käpylä et al. 2009; Ossendrijver et al. 2001). In the models computed in this work, we thus do not consider any relationship between these two quantities. As can be seen in Eqs. (10) and (11),  $\beta$  can be directly interpreted as an effective diffusion coefficient whose effects are known. Hence, we have focused on the effects of varying  $\gamma$  for a fixed  $\beta$  even if a full parameter study in  $\{\gamma; \beta\}$  space should in principle be done.

Working in spherical coordinates and under the assumption of axisymmetry, we write the total mean magnetic field  $\mathbf{B}$ , velocity field  $\mathbf{V}$  and the turbulent pumping (where we neglect  $\gamma_\phi$  because its amplitude is much less than the differential rotation) as:

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \nabla \times (A_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi) + B_\phi(r, \theta, t) \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad (7)$$

$$\mathbf{V}(r, \theta) = \mathbf{v}_p(r, \theta) + r \sin \theta \Omega(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\phi, \quad (8)$$

$$\gamma(r, \theta) = \gamma_p(r, \theta) = \gamma_r(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_r + \gamma_\theta(r, \theta) \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (9)$$

where  $\mathbf{v}_p$  is the poloidal velocity field. Reintroducing this poloidal/toroidal decomposition of the field in the mean induction equation, we get two coupled partial differential equations, one involving the vector potential  $A_\phi$  and the other concerning the toroidal field  $B_\phi$ . The corresponding dimensionless equations are then:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\phi}{\partial t} &= \frac{\eta}{\eta_t} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi + C_s S(r, \theta, B_\phi) \\ &\quad - R_e \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi A_\phi) \\ &\quad + \frac{1}{\varpi} (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \cdot \nabla (\varpi A_\phi) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_\phi}{\partial t} &= \frac{\eta}{\eta_t} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) B_\phi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial (\varpi B_\phi)}{\partial r} \frac{\partial (\eta / \eta_t)}{\partial r} \\ &\quad - R_e \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right) - R_e B_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_p \\ &\quad - \varpi (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \cdot \nabla \left( \frac{B_\phi}{\varpi} \right) \\ &\quad - B_\phi \nabla \cdot (C_{\gamma r} \gamma_r \hat{\mathbf{e}}_r + C_{\gamma \theta} \gamma_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta) \\ &\quad + C_\Omega \varpi (\nabla \times (\varpi A_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega, \end{aligned} \quad (11)$$

where  $\varpi = r \sin \theta$ ,  $\eta = \eta_m + \beta$ ,  $\eta_t$  is the turbulent magnetic diffusivity (diffusivity in the convective zone) and  $S(r, \theta, B_\phi)$  the Babcock-Leighton surface source term for poloidal field (we neglect its contribution in the generation of the toroidal field compare to the shear applied by

the differential rotation. We define the diffusive timescale as  $\tau_\eta = R_\odot^2/\eta_t$ . Note that our velocity field is time-independent since we will not assume any fluctuations in time of the differential rotation  $\Omega$  or of the meridional circulation  $v_p$ .

In order to write these equations in a dimensionless form, we choose as length scale the solar radius  $R_\odot$  and as timescale the diffusion time  $R_\odot^2/\eta_t$  based on the envelope diffusivity  $\eta_t = 5 \times 10^{10} \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ . This leads to the appearance of five control parameters  $C_\Omega = \Omega_0 R_\odot^2/\eta_t$ ,  $C_s = s_0 R_\odot/\eta_t$  and  $R_e = v_0 R_\odot/\eta_t$  where  $\Omega_0, s_0, v_0$  are respectively the rotation rate at the equator and the maximal amplitude of the surface source term and of the meridional flow. For the solar rotation rate, we have  $\Omega_0/2\pi = 456 \text{ nHz}$ . We can also define similar dimensionless numbers  $C_{\gamma r} = \gamma_{r0} R_\odot/\eta_t$  and  $C_{\gamma\theta} = \gamma_{\theta 0} R_\odot/\eta_t$  for turbulent pumping. As we don't know how the  $C_\gamma$ 's are related, we allow for any relation between them.

Equations (10) and (11) are solved with the STELEM code (Emonet & Charbonneau 1998, private communication) in an annular meridional plane with the colatitude  $\theta \in [0, \pi]$  and the radius (in dimensionless units)  $r \in [0.6, 1]$  i.e. from slightly below the tachocline ( $r = 0.7$ ) up to the solar surface. The STELEM code has been thoroughly tested and validated thanks to an international mean field dynamo benchmark involving 8 different codes (Jouve et al. 2008). At  $\theta = 0$  and  $\theta = \pi$  boundaries, both  $A_\phi$  and  $B_\phi$  are set to 0. Both  $A_\phi$  and  $B_\phi$  are set to 0 at  $r = 0.6$ . At the upper boundary, we smoothly match our solution to an external potential field, i.e. we have vacuum for  $r \geq 1$  (see Jouve & Brun 2007b, for more details). As initial conditions we are setting a confined dipolar field configuration, i.e. the poloidal field is set to  $\sin \theta/r^2$  in the convective zone and to 0 below the tachocline whereas the toroidal field is set to 0 everywhere. All simulations have been carried with a resolution of  $129 \times 129$  and the parameters used for the models are summarised in Table 1.

## 2.2 The physical ingredients

All quantities are in dimensionless values, and all the profiles are normalised to unity such that the dimensionless parameters set the strength of each ingredient.

The rotation profile captures some realistic aspects of the Sun's angular velocity, deduced from helioseismic inversions (Thompson et al. 2003), assuming a solid rotation below 0.66 and a differential rotation above the interface (cf. Fig. 1).

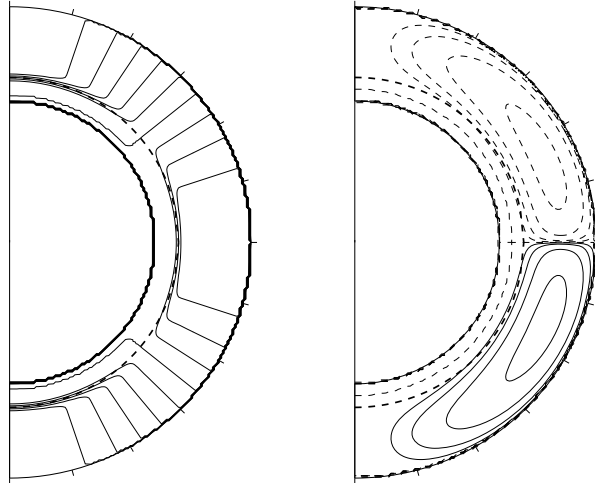
$$\Omega(r, \theta) = \Omega_c + \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{d_1} \right) \right] \times [1 - \Omega_c - c_2 \cos^2(\theta)] \quad (12)$$

with  $r_c = 0.7$ ,  $d_1 = 0.02$ ,  $\Omega_c = 0.92$  and  $c_2 = 0.2$ . With this profile, the radial shear is maximal at the tachocline.

We assume that the diffusivity in the envelope  $\eta$  is dominated by its turbulent contribution  $\eta_T$  in the convection

**Table 1** Summary of the control parameters defined in Sect. 2.2 for the different cases studied in this work. S and R stands for Standard and Reference, i.e. they include (respectively dot not include) turbulent pumping. The trailing number in the case name gives the rotation rate  $\Omega$  in units of  $\Omega_\odot$ . The S and R cases are at the solar rotation rate. The advective control parameters ( $R_e$ ,  $C_{\gamma r}$  and  $C_{\gamma\theta}$ ) are normalized such that their relative strength can be directly estimated.

Case	$\frac{C_\Omega}{10^5}$	$\frac{R_e}{10^3}$	$\frac{C_{\gamma r}}{10^3}$	$\frac{C_{\gamma\theta}}{10^3}$	$P_{\text{cyc}}$ (years)	$B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}}$
S	2.78	4.50	0	0	22.5	2.57
R0.7	2.00	2.67	0.0289	0.0723	26.4	1.51
R0.9	2.50	2.41	0.0452	0.113	24.2	0.999
R	2.78	2.30	0.0557	0.139	22.7	0.701
R1.1	3.00	2.22	0.0650	0.163	21.2	0.536
R1.3	3.50	2.07	0.0885	0.221	18.7	0.328
R1.4	4.00	1.95	0.116	0.289	16.3	0.228
R1.6	4.50	1.85	0.146	0.366	14.5	0.174
R1.8	5.00	1.76	0.181	0.452	13.0	0.148
R2.0	5.50	1.69	0.219	0.547	11.7	0.127
R2.5	7.00	1.52	0.354	0.885	9.22	0.104
R2.9	8.00	1.43	0.462	1.16	8.22	0.100
R3.6	10.0	1.29	0.723	1.81	6.76	0.0706
R4.3	12.0	1.19	1.04	2.60	5.14	0.0539
R5.0	14.0	1.11	1.42	3.54	4.51	0.0377



**Fig. 1** *Left panel:* Isorotation lines. Contours are regularly spaced by 0.02 and spans from 0.8 to 1.0. *Right panel:* Meridional streamfunction. Contours are logarithmically spaced by  $10^{0.5}$ . Positive (negative) values are in solid (dash) line. The thick dash line locates the tachocline position.

zone whereas in the stable interior,  $\eta_c \ll \eta_T$ . We smoothly match the two different constant values with an error function which enables us to quickly and continuously transit from  $\eta_c$  to  $\eta_T$  in the vicinity of the core-envelope interface i.e.

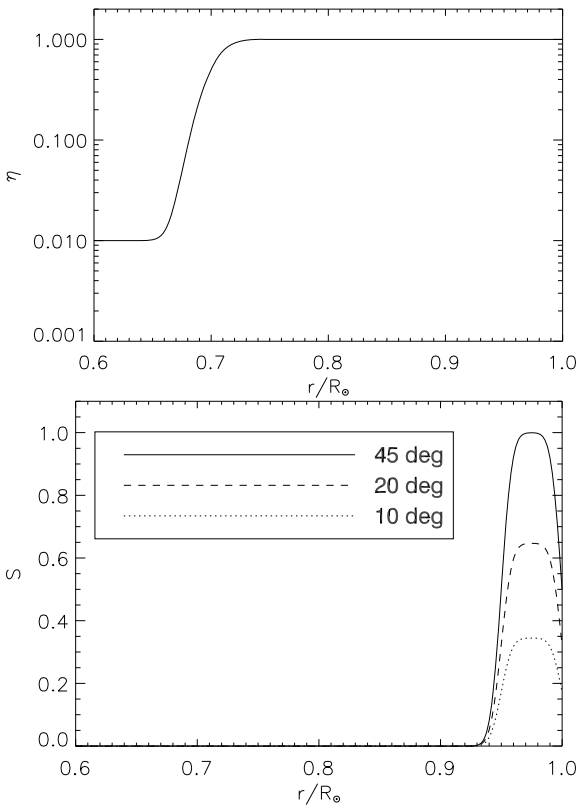
$$\eta(r) = \frac{\eta_c}{\eta_t} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\eta_c}{\eta_T} \right) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{d_1} \right) \right] \quad (13)$$

with  $\eta_c = 5 \times 10^8 \text{ cm}^2\text{s}^{-1}$ .

In Babcock-Leighton (BL) flux-transport dynamo models, the poloidal field owes its origin to the tilt of magnetic loops emerging at the solar surface. Thus, the source has to be confined to a thin layer just below the surface and since the process is fundamentally non-local, the source term depends on the variation of  $B_\phi$  at the BCZ. A quenching term is introduced to prevent the magnetic energy from growing exponentially without bound (see Sect. 4). The expression is then

$$S(r, \theta, B_\phi) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_2}{d_2} \right) \right] \times \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 1}{d_2} \right) \right] \times \left[ 1 + \left( \frac{B_\phi(r_c, \theta, t)}{B_0} \right)^2 \right]^{-1} \times \cos \theta \sin \theta B_\phi(r_c, \theta, t), \quad (14)$$

where  $r_2 = 0.95$  is the location of the max of the BL source term,  $d_2 = 0.01$  is the thickness of this layer and  $B_0 = 10^5$  G.



**Fig. 2** Upper panel: Diffusivity profile as function of radius. Lower panel: Babcock Leighton source term as function of radius for different colatitudes.

The MC is observed to be poleward at the surface with a maximum speed of  $v_0 \simeq 20 \text{ ms}^{-1}$  at midlatitude (Basu

& Antia 2010), but helioseismic inversion are currently unable to probe its amplitude in layers much below  $0.95 R_\odot$  as it possesses weaker flows that are difficult to detect (Giles et al. 1997; Haber et al. 2002b; Hathaway & Rightmire 2010). Nevertheless, this element is crucial in flux transport models incorporating such process because it links the two sources of the magnetic field, namely the BCZ and the solar surface. In theoretical models, one usually assumes to conserve mass using a unicellular flow with an equatorward return flow at the BCZ. This has been reproduced in recent solar simulations (Miesch et al. 2008) when global flows are averaged over long intervals. However, other simulations tend to show that it is instead rather multicellular both in radial and latitudinal direction and highly time dependant (Browning et al. 2006; Brun & Toomre 2002).

The nature of these flows in other stars is even less constrained. In more rapidly rotating Suns, 3-D models presently indicate that the circulations are likely to be multicelled in both radius and latitude (Ballot et al. 2007; Brown et al. 2008). In the series of models discussed in this paper, we restrict ourselves to Babcock-Leighton flux-transport models that have a large single cell per hemisphere. As in the Sun, the meridional circulation are directed poleward at the surface and here they vanish at the bottom boundary ( $r = 0.6$ ). This flow penetrates a little beneath the tachocline into the radiative interior as it is likely to occur (Brun et al. 2011; Garaud & Brummell 2008). To model the single cell meridional circulation we consider a stream function with the following expression from Dikpati (2011):

$$\psi = -\psi_0 \left( \frac{r - r_b}{1 - r_b} \right)^2 (\theta - \theta_0) \sin \left( \pi \frac{r - r_b}{1 - r_b} \right) \times e^{-\left( \frac{r - r_0}{\Gamma} \right)^2} (1 - e^{-\beta_1 r \theta^\epsilon}) (1 - e^{-\beta_2 r \theta^\epsilon}), \quad (15)$$

where  $r_b = 0.65$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\Gamma = 0.15$ ,  $r_0 = 0.76$ ,  $\epsilon = 2.0$ ,  $\beta_1 = 0.316228$ ,  $\beta_2 = 0.3$ .  $\psi_0$  is chosen such that the velocities are normalised to unity. We define  $\rho$  the density given by

$$\rho(r) = \left[ \frac{1}{r} - 0.97 \right]^m \quad (16)$$

in which  $m = 1.5$ . The velocity components are derived through the relation  $\rho \mathbf{v}_p = \nabla \times \left( \frac{\psi}{r \sin \theta} \hat{\mathbf{e}}_\phi \right)$ . In our simulation, radial resolution spans from  $0.6$  to  $1.0 R_\odot$  corresponding to a density contrast of  $\Delta \rho \simeq 120$ .

With this setup, the ratio between the maximal speed at the surface and the BCZ is  $v_{\text{surf}}/v_{\text{BCZ}} \simeq 109$ . This flow further vanishes at  $r_b$ . We chose this profile because it allow us to control this ratio, which we found to be an important parameter for the ability of pumping to influence the magnetic period. The importance of pumping is enhanced as the MC amplitude is decreased at the BCZ, i.e. there is a stronger correlation between the magnetic cycle period and the amplitude of pumping.

We turn now to the description of the turbulent pumping, the process we will focus on. In principle, its characteristics can be determined by direct numerical integration of the equations of magnetohydrodynamics (MHD).

Several authors (e.g. Brandenburg et al. 1990; Ossendrijver et al. 2001) have attacked this problem in order to calculate the dynamo coefficients, i.e. the  $\alpha$ -effect and  $\gamma$ -pumping. However, physical conditions in the solar convection zone (e.g. high Reynolds number) prevent simulations from computing these coefficients in an entire shell. For this reason, most of 3D MHD simulations are restricted to Cartesian boxes that represents only a small section (in both radius and latitude) of stellar convection zone (see however Brown et al. 2010, for recent progress in computing transport coefficients in global model). The profile we use in this work are inspired by one of the last estimation done by Käpylä et al. (2006),

$$\gamma_r = -\frac{1}{4} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.715}{0.015} \right) \right] \times \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 1.02}{0.05} \right) \right] \times \cos^2(\theta) \quad (17)$$

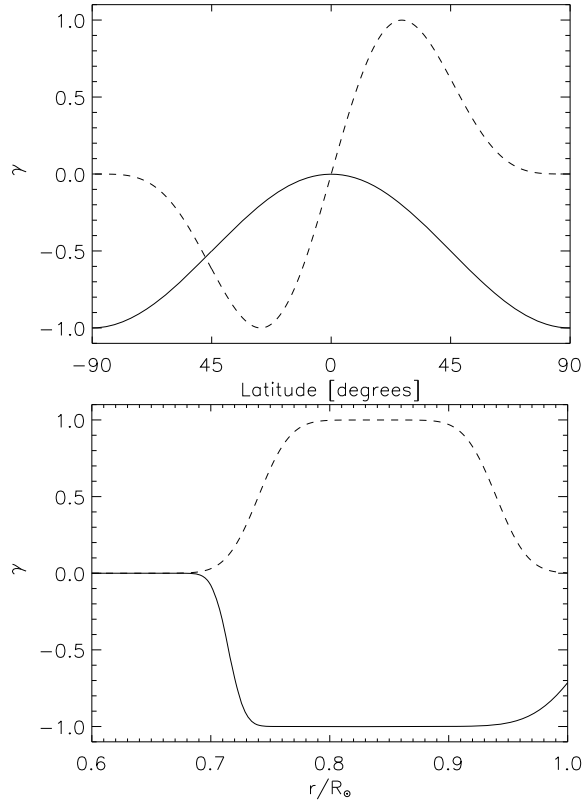
$$\gamma_\theta = \frac{25\sqrt{5}}{64} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.74}{0.03} \right) \right] \times \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - 0.94}{0.03} \right) \right] \times \cos(\theta) \sin^4(\theta). \quad (18)$$

### 2.3 The standard model

We first compute a model *without* the pumping effect which we will refer as our *standard* case for direct comparison with forthcoming models. As we want to reproduce the Sun's properties, we have chosen our parameters for case S (see Table 1) such as to get the correct cycle period. We choose  $C_s$  such that it is well above the threshold for dynamo action ( $C_s^{\text{crit}} = 9.6$ ), enabling us to see the fields in the regime of a well established flux transport dynamo.

We show in Fig. 4 the radial field at the surface and the toroidal field at the BCZ, i.e. at  $r = 0.7R_\odot$ . It can be directly compared to the solar butterfly diagram if we identify the toroidal field at the BCZ as the source of buoyant magnetic flux tubes rising radially through the convection up to the surface seen as active regions. For this, the rising time must be very short compare to the magnetic cycle. But according to models, the rising time spans from months to dozens of years (see review of Fan 2009). In particular, Jouve et al. (2010b) found that even a short delay is important for a modulation in the cycle but not on the cycle period itself. We will thus not address this problem in this work.

With this typical model, we are able to reproduce several aspects of the solar cycle, notably its period of approximately 22 years, a strong equatorward branch for toroidal field restricted to low latitudes, a phase shift of  $\pi/2$  between the surface polar field and the deep toroidal field, so that the polar field changes its polarity from negative to positive when the toroidal field is positive and maximal in intensity near the equator.

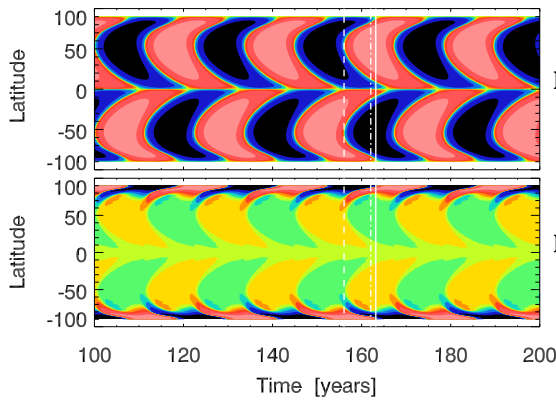


**Fig. 3** Profile of  $\gamma_\theta$  (dash line) and  $\gamma_r$  (solid line) as function of latitude at their maximal radial strength, i.e. at  $r=0.85$  for both cases (upper panel), and as function of radius at their maximal latitudinal strength, i.e. at  $\theta = 0$  for  $\gamma_r$  and  $\theta = \arccos(1/\sqrt{5})$  for  $\gamma_\theta$  (lower panel).

As described in Sect. 2.2, the amplitude of MC is very low at the BCZ compare to the velocity at the surface. In the advection dominated regime, we found that this strongly affects the magnetic cycle periods because it is the dominant mechanism capable of transporting the toroidal field toward the equator. The recent work from Pipin & Kosovichev (2011) confirm the great importance of the speed and the depth of the return flow. To compensate for this effect and to recover the 22-year magnetic cycle, we choose a maximal velocity at the surface ( $\sim 32 \text{ m s}^{-1}$ ) slightly higher than what is usually assumed in simulations ( $\sim 20 \text{ m s}^{-1}$ ). However, meridional flow is a very time-dependant process which can reach values as high as what is used in this work (Basu & Antia 2010). Also, the strong equatorward branch for the toroidal field is the signature of the drag of the toroidal field by equatorward MC at the BCZ and thus clearly shows the dominating effect of field advection over diffusion which can be seen in the scaling law:

$$P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.05} s_0^{0.07} v_0^{-0.83} \quad (19)$$

in the range  $s_0 = [4.7; 100] \text{ cm s}^{-1}$ ,  $v_0 = [1200; 4500] \text{ cm s}^{-1}$  and  $\Omega_0 = [1.4 \times 10^{-6}; 7.2 \times 10^{-6}] \text{ Hz}$ . We directly see that the meridional circulation speed dominates over  $C_s$  and  $C_\Omega$ . As  $v_0$  dominates the scaling,



**Fig. 4** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Butterfly diagram, i.e. time-latitude slice of the toroidal field at the BCZ and of the radial field at the surface. Red (blue) colors indicate positive (negative) magnetic fields. Contours are logarithmically spaced with 2 contours covering a decade in field strength. The color range spans from Max to Min of the magnetic field strength. The vertical dashed line corresponds to the epoch of reversal of toroidal field, the plain line correspond to the epoch of reversal of poloidal field at the poles from negative to positive polarity and the dash-dotted line corresponds to the positive maximum of toroidal field near the equator.

it is crucial to assess how  $v_0$  scales with  $\Omega_0$ . We rely on 3D numerical simulation from Brown et al. (2008) which studies the influence of rotation rates on solar like stars. They found that MC decreases with the rotation rate as  $v_0 \propto \Omega_0^{-0.45}$ . This is not intuitive as one could expect that the meridional circulation increases with the rotation rate. A careful study of the vorticity equation shows that it actually weakens with rotation rate as more and more kinetic energy is being transferred to longitudinal motions at the expense of meridional kinetic energy. Assuming this relation in our simulations, we obtain naturally that  $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.41}$  in the range  $\Omega_0 = [1.0 \times 10^{-6}; 1.5 \times 10^{-5}]$  Hz. This is in agreement with what has been found in JBB2010.

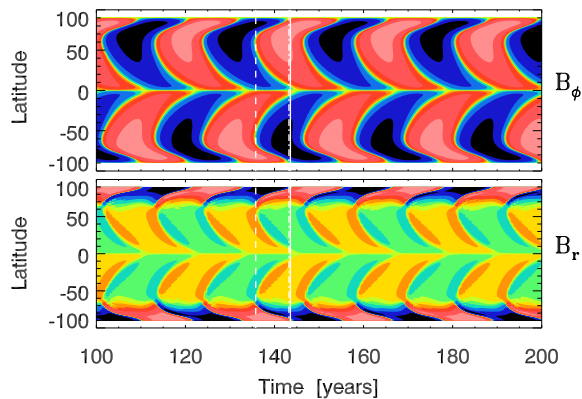
As stated above, the current model reproduce quite well a solar-like butterfly diagram, but is still unable to reproduce the  $P_{\text{rot}} - P_{\text{cyc}}$  relationship because of the strong influence of MC in these models, especially at the BCZ. To address this issue, JBB2010 tried to incorporate a multicellular MC as observed in 3D numerical simulations of e.g. Ballot et al. (2007) and Brown et al. (2008), and were indeed able to recover the observational trend. In this work, we propose another solution, that is to keep a unicellular MC but to introduce the turbulent pumping as a new mechanism to transport the poloidal field from the surface down to the tachocline. GdG2008 offered insights on the possibilities of such process for a shallow MC (see Sect. 1.2). We wish here to verify if their results holds for a deeper MC and under which conditions the turbulent pumping can shorten the advection path driven by the meridional circulation.

### 3 Influence of turbulent pumping on stellar cycles

#### 3.1 Reference case

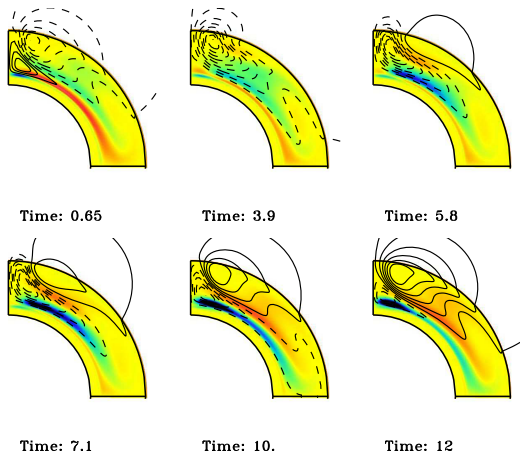
We turn now to the models *with* turbulent pumping. As before for the standard case, we define here the reference case **R** corresponding to the Sun, i.e. at the solar rotation rate (cf Fig. 5) and reproducing the solar features described in Sect. 2.3. We rely on the estimation from Käpylä et al. (2006) for the pumping amplitude with  $\gamma_{r0} = 40 \text{ cm s}^{-1}$  and  $\gamma_{\theta 0} = 100 \text{ cm s}^{-1}$ . We sum up the physical parameters for the reference case (i.e. with turbulent pumping) at 1 solar rotation rate as **R** in Table 1.

With the profiles described in Sect. 2.2, the latitudinal pumping component increases the total advective speed resulting in a lower MC amplitude ( $\sim 17 \text{ m s}^{-1}$ ) to keep a 22 year period, in a better agreement with temporally averaged observations. The strong equatorward branch of the toroidal field appears at slightly higher latitudes  $65^\circ$  with the regions of strongest magnetic intensity confined in a smaller area near the poles. We have the opposite situation at the surface where the effective speed is reduced expanding the poloidal field to lower latitudes. At the poles, the radial pumping drags the poloidal field down to the tachocline and thus leads to a lower concentration of surface magnetic fields at the poles. This effect is in our deep MC not as striking as what has been reported by GdG2008. The phase relation of  $\pi/2$  between the polar and the toroidal fields described in Sect. 2.3 are well reproduced in this case (see Fig. 5).



**Fig. 5** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Butterfly diagram for the reference case. Same color code as in Fig. 4.

Figure 6 shows the behaviour of the magnetic field in this model. Here the magnetic field follows the advective path created by the meridional flow and consequently this large scale flow plays a key role in these dynamo solutions. In this reference case at  $1\Omega_\odot$ , pumping amplitudes are not sufficiently high to advect the magnetic fields away from MC flow.



**Fig. 6** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Evolution of the vector potential (black lines) and of the toroidal field (color contours) during half a magnetic cycle. Red (blue) colours indicate positive (negative) toroidal field and plain (dotted) lines indicate clockwise (anticlockwise) poloidal field lines. Time is expressed in years.

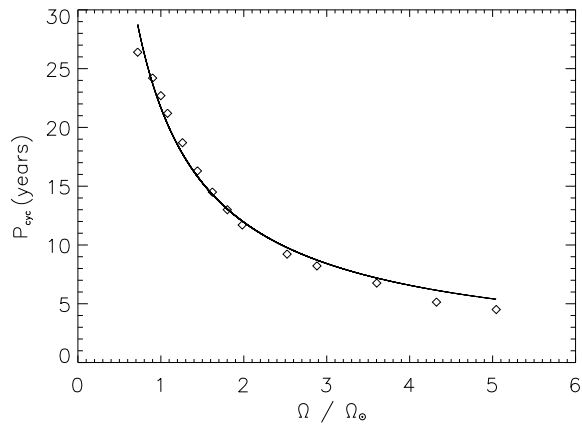
### 3.2 Varying the rotation rates

We wonder now under which conditions the turbulent pumping can solve our initial problem, namely the scaling relationship between the magnetic cycle period  $P_{\text{cyc}}$  with the rotation period  $P_{\text{rot}}$ . A least square fit through our data gives

$$P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.40} \gamma_{r0}^{-0.30} \gamma_{\theta 0}^{-0.15} \quad (20)$$

in the range of  $v_0 = [1000; 4500] \text{ cm s}^{-1}$ ,  $\gamma_{r0} = [20; 100] \text{ cm s}^{-1}$ ,  $\gamma_{\theta 0} = [50; 300] \text{ cm s}^{-1}$ . This result is not in complete agreement with the work of GdG2008. We found that indeed the turbulent pumping becomes a major player in setting the magnetic period, but the quantification of its influence remains different. First, the MC is still the dominant effect and the radial pumping component is not as important as in GdG2008. Second, the effect of  $\gamma_{\theta}$  is not negligible. This supports the idea that the latitudinal advection process, and especially at the BCZ, is an important ingredient in advection dominated BL models, capable of transporting the toroidal magnetic field from the pole toward the equator. This difference may come from their choice of a shallow MC with almost zero velocity at the BCZ.

A simple look at the scaling law (20) gives that if we want to recover the observational trend (again, we assume that  $v_0 \propto \Omega^{-0.45}$ ), and assuming that  $\gamma_r/\gamma_{\theta}$  remains constant, the pumping effect should roughly scales as  $\Omega_0^2$ . A first estimate done in Tobias et al. (2001) have shown that the turbulent pumping actually decreases with rotation rate. Later on, Käpylä et al. (2009) found on the contrary that the rotation rate have almost no effect on the vertical pumping. This lets the scaling as an open question. In order to verify if this scaling holds in solar type stars, work are currently done in 3D MHD simulation (Matt et al. 2011).

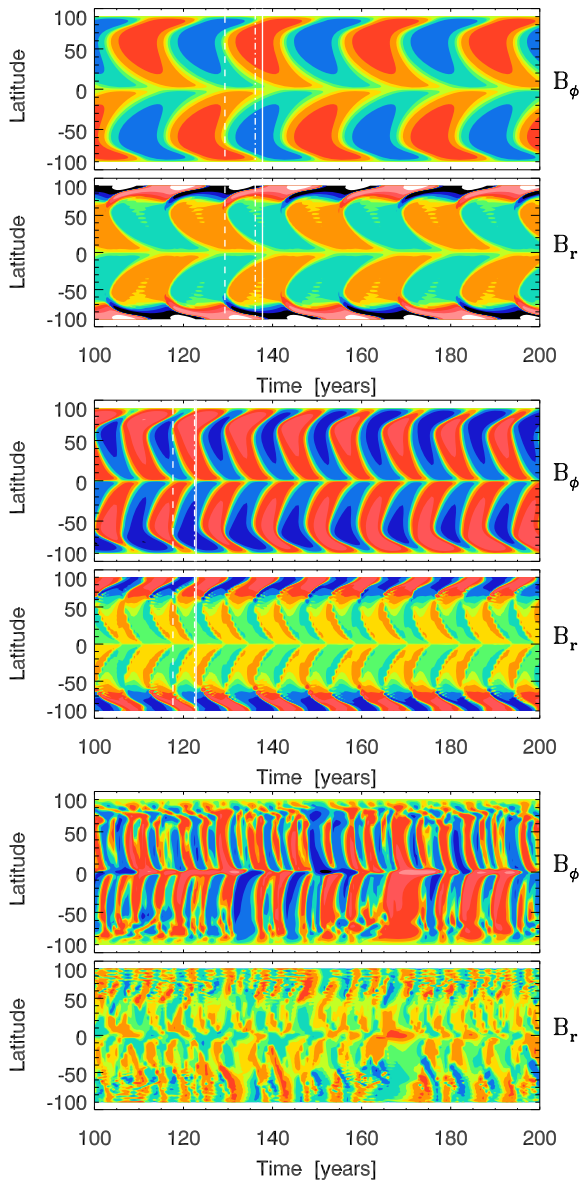


**Fig. 7** Magnetic cycle period as function of the rotation rate in models including turbulent pumping. Solid line is a least square fit of the simulated data.

Under these assumptions, we found indeed that  $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{-0.86}$ , in agreement with the observations as expected. On Fig. 7, we present the rotation rates ranging from  $0.7\Omega_{\odot}$  up to  $5\Omega_{\odot}$  with a least square fit of the data. Our result does not hold outside this range because a systematic period does not emerge for  $\Omega > 5\Omega_{\odot}$ . For  $\Omega < 0.7\Omega_{\odot}$ , the pumping is negligible and lets MC imposing that  $P_{\text{cyc}}$  increases with  $\Omega$ . We are thus back to a strong dependency of  $P_{\text{cyc}}$  with MC amplitude. We show in Fig. 8, 3 representative cases at  $0.7\Omega_{\odot}$ ,  $2\Omega_{\odot}$  and  $5\Omega_{\odot}$ . We see that the equatorward branch becomes shorter and shorter as the rotation rate, and so the pumping, is increased. Also, the surface magnetic field becomes homogeneously distributed in latitude thanks to the increase of both components of the turbulent pumping. However, the determination of a period for the most rapidly rotating stars ( $\Omega > 4\Omega_{\odot}$ ) becomes difficult as the butterfly diagram is affected by more and more intermittency and small scale structures as can be seen in the bottom panel of Fig. 8. This explains the last points of Fig. 7 to lie slightly away from the trend.

One can also note the appearance of a modulation of both cycle strength and period as soon as  $2\Omega_{\odot}$  as seen in the middle panel of Fig. 8. We might not compare this with long term modulation known as Gleissberg cycles. For 2D models in the kinematic regime (as in this work), the Lorentz force exerted by the magnetic fields on the velocity field, the so-called Malkus-Proctor effect (Malkus & Proctor 1975), is not included. Such a feedback from the large scale Lorentz force has been shown to have strong effect on for instance torsional oscillations (Rempel 2006), long term modulation (Phillips et al. 2002) and intermittency (Moss & Brooke 2000). In the current simulations instead, the modulations are due to the pumping mechanism which advects the magnetic fields against the MC flow. Thus, the phase becomes more and more modified between  $B_{\text{pol}}$  and  $B_{\text{tor}}$  up to a point where ephemeral dynamo loops appears, generating multiple periodicities. It becomes even more dramatic when we keep increasing the rotation rate. The solar butter-

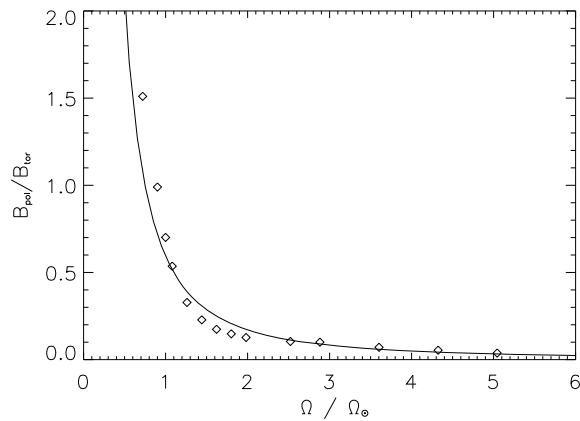




**Fig. 8** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Butterfly diagram for 3 representative cases :  $0.7\Omega_{\odot}$ ,  $2.0\Omega_{\odot}$  and  $5\Omega_{\odot}$ . Same color code as in Fig. 4. All of the figures share the same color scale : between  $-5 \times 10^3$  G and  $5 \times 10^3$  G for  $B_r$  and between  $-9 \times 10^5$  G and  $9 \times 10^5$  G for  $B_{\phi}$ . We show the phase relations for the top and middle panel only as it is not possible to define them for the highest rotation case.

fly diagram features almost vanish in very small structures. The poleward and equatorward branches barely exist and the magnetic field is completely homogeneously distributed over all latitudes and do not present a strong concentration of poloidal fields at the poles. In these cases, the advection is no longer dominated by MC but by pumping, suggesting that we are entering in a new class of regime for BL flux transport models.

We turn now to the ratio between the maximal value of the poloidal field at the surface and the maximal value of the toroidal field at the BCZ,  $B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}}$ . This ratio is found to decrease with the rotation rate ( $B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}} \propto \Omega^{-1.80}$ ) as seen on Fig. 9. This is in reasonable agreement with the observations of rapidly rotating solar like stars by Petit et al. (2008) where rapid rotators host a large scale toroidal component in their surface field whereas the magnetic field is mostly poloidal for low rotation rates. In the range of available observations, we found systematically a lower ratio. This is not surprising as we estimated  $B_{\text{tor}}$  at the BCZ where it is generated, and hence where it is the strongest whereas observers have access only at the weaker surface toroidal field. To evaluate the surface toroidal magnetic field in our simulations, a first approach would be to take the value close to the surface. A typical ratio between the BCZ ( $r = 0.7$ ) and the surface ( $r = 0.98$ ) toroidal field for the reference case is found to be  $B_{\text{tor}}^{\text{BCZ}}/B_{\text{tor}}^{\text{surf}} \simeq 60$ .



**Fig. 9**  $B_{\text{pol}}/B_{\text{tor}}$  ratio as function of the rotation rate. Solid line is a least square fit of the data.

## 4 Conclusion and perspectives

The aim of this study was to address the current issue encountered by 2D mean field models in which the magnetic period decreases with the rotation rate, contrary to the observations (Saar 2009; Wright et al. 2011). Earlier work of JBB2010 showed that this behaviour was due to the large influence of the MC. More specifically, they have used the results of recent 3D simulations Brown et al. (2008) in which meridional circulation amplitude decrease with rotation rate, and came to the conclusion that the observed  $P_{\text{cyc}} - P_{\text{rot}}$  relationship cannot be reproduced, unless a multicellular MC is considered.

The idea of this work was to tackle this problem under another angle introducing the turbulent pumping mechanism which has been shown to have interesting properties on the magnetic period (GdG2008). We have then performed 2D BL flux transport simulations with the STELEM

code in the advection dominated regime. We first computed a *standard* model without turbulent pumping but producing solar characteristics. We found that in such models the magnetic period is indeed very sensitive to the MC amplitude ( $P_{\text{cyc}} \propto \Omega_0^{0.05} s_0^{0.07} v_0^{-0.83}$ ), and is therefore not able to reproduce the observations, confirming the results of JBB2010.

In the presence of turbulent pumping however, the MC is no longer the only process capable of influencing  $P_{\text{cyc}}$ . We found that the latitudinal speed at the tachocline drives the magnetic cycle period. The weaker the MC, the stronger the influence of pumping on the magnetic cycle period. A reasonable equatorward flow at the BCZ ( $\sim 0.2 \text{ m s}^{-1}$ ) with a velocity contrast between the surface and the tachocline of  $\sim 109$  gives the scaling  $P_{\text{cyc}} \propto v_0^{-0.40} \gamma_{r0}^{-0.30} \gamma_{\theta 0}^{-0.15}$ . The observational trend can be thus recovered only if  $\gamma \propto \Omega^2$  which has not been reported yet in previous Cartesian simulations (Käpylä et al. 2009; Tobias et al. 2001). However 3D MHD simulations in full spherical shells are currently under development to test this assumption (Matt et al. 2011).

Another successful feature resulting from the presence of turbulent pumping is their ability to reduce the strong concentration at the poles. On one hand, the strong radial component drags the surface field down to the tachocline. On the other hand, the latitudinal component is equatorward everywhere (and therefore at the surface) expanding the strong poloidal field to lower latitudes. As we increase the rotation rates, the pumping becomes stronger and this dilution is enhanced until the surface field becomes completely homogeneous. However, at this level of rotation, the butterfly diagram is strongly affected by the pumping which has become the dominant advective process with a greater amplitude than the MC. For instance, it does not show strong equatorward nor poleward branches. We enter here in a different dynamo regime, in which we are dominated, not by MC, but by turbulent pumping, with characteristics different than the Sun.

Although this new ingredient looks promising with respect to our study, turbulent pumping amplitude must be as high as few  $\sim 10 \text{ m s}^{-1}$  for  $\sim 5\Omega_{\odot}$ . Such high values have not been reported yet in direct numerical simulations. A way out would be to mix the two proposed approaches by considering in the same time both pumping and multicellular MC. The latter naturally arises in 3D MHD global simulations (Ballot et al. 2007; Brown et al. 2008; Brun & Toomre 2002) in which they last for several years and are supported by observational evidences via local helioseismology techniques (Haber et al. 2002a).

Finally, long term modulations have not been considered in this work since no nonlinear effects beside quenching has been used. We intend to take into account those effects such as Malkus Proctor term in a future work since they are potentially important (Moss & Brooke 2000). We also intend to extend the resolution domain by including an atmosphere which would give a prediction for the external

toroidal field, but also a bottom boundary condition for stellar wind models (Pinto et al. 2011).

Studying stellar magnetism with mean field models is instructive as we can extract information on the sensitivity of magnetic cycles to parameter change, such a study being very computationally expensive and delicate with 3D MHD simulations (Brown et al. 2011). However, in the light of this work, a subtle combination of different processes must be considered to account for the many aspects of the observations. More accurate data would be of great help to understand the complex underlying physics of stellar dynamo.

**Acknowledgements.** The authors acknowledge funding by the European Research Council through ERC grant STARS2 207430 www.stars2.eu. O. Do Cao also acknowledges useful discussions with L. Jouve and G. Guerrero.

## References

- Babcock, H.W.: 1961, *ApJ* 133, 572
- Baliunas, S.L., Nesme-Ribes, E., Sokoloff, D., Soon, W.H.: 1996, *ApJ* 460, 848
- Ballot, J., Brun, A.S., Turck-Chièze, S.: 2007, *ApJ* 669, 1190
- Basu, S., Antia, H.M.: 2010, *ApJ* 717, 488
- Brandenburg, A., Tuominen, I., Nordlund, Å., Pulkkinen, P., Stein, R.F.: 1990, *A&A* 232, 277
- Brandenburg, A., Moss, D., Tuominen, I.: 1992, in: K.L. Harvey (ed.), *The Solar Cycle*, ASPC 27, p. 536
- Brandenburg, A., Saar, S.H., Turpin, C.R.: 1998, *ApJ* 498, L51
- Brown, B.P., Browning, M.K., Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2008, *ApJ* 689, 1354
- Brown, B.P., Browning, M.K., Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2010, *ApJ* 711, 424
- Brown, B.P., Miesch, M.S., Browning, M.K., Brun, A.S., Toomre, J.: 2011, *ApJ* 731, 69
- Browning, M.K.: 2008, *ApJ* 676, 1262
- Browning, M.K., Miesch, M.S., Brun, A.S., Toomre, J.: 2006, *ApJ* 648, L157
- Brun, A.S., Toomre, J.: 2002, *ApJ* 570, 865
- Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2011, *ApJ*, in press
- Cattaneo, F., Hughes, D.W.: 2006, *JFM* 553, 401
- Cattaneo, F., Hughes, D.W., Weiss, N.O.: 1991, *MNRAS* 253, 479
- Charbonneau, P.: 2010, *Living Reviews in Solar Physics* 7, 3
- Charbonneau, P., Saar, S.H.: 2001, in: G. Mathys, S.K. Solanki, D.T. Wickramasinghe (eds.), *Magnetic Fields Across the Hertzsprung-Russell Diagram*, ASPC 248, p. 189
- Choudhuri, A.R., Gilman, P.A.: 1987, *ApJ* 316, 788
- Dasi-Espuig, M., Solanki, S.K., Krivova, N.A., Cameron, R., Peñuela, T.: 2010, *A&A* 518, A7
- Dikpati, M.: 2011, *ApJ* 733, 90
- Dikpati, M., Charbonneau, P.: 1999, *ApJ* 518, 508
- Dikpati, M., Saar, S.H., Brummell, N., Charbonneau, P.: 2001, in: G. Mathys, S.K. Solanki, D.T. Wickramasinghe (eds.), *Magnetic Fields Across the Hertzsprung-Russell Diagram*, ASPC 248, p. 235
- Fan, Y.: 2004, in: T. Sakurai, T. Sekii (eds.), *The Solar-B Mission and the Forefront of Solar Physics*, ASPC 325, p. 47
- Fan, Y.: 2009, *Living Reviews in Solar Physics* 6, no. 4
- Garaud, P., Brummell, N.H.: 2008, *ApJ* 674, 498



- Giles, P.M., Duvall, Jr., T.L., Kosovichev, A.G., Scherrer, P.H.: 1997, BAAS 29, 914
- Guerrero, G., de Gouveia Dal Pino, E.M.: 2008, A&A 485, 267
- Haber, D.A., Hindman, B.W., Toomre, J., Bogart, R.S., Hill, F.: 2002a, BAAS 34, 645
- Haber, D.A., Hindman, B.W., Toomre, J., Bogart, R.S., Larsen, R.M., Hill, F.: 2002b, ApJ 570, 855
- Hathaway, D.H., Rightmire, L.: 2010, Sci 327, 1350
- Jouve, L., Brun, A.S.: 2007a, AN 328, 1104
- Jouve, L., Brun, A.S.: 2007b, A&A 474, 239
- Jouve, L., Brun, A.S.: 2009, ApJ 701, 1300
- Jouve, L., Brun, A.S., Arlt, R., Brandenburg, A., et al.: 2008, A&A 483, 949
- Jouve, L., Brown, B.P., Brun, A.S.: 2010a, A&A 509, A32 (JBB2010)
- Jouve, L., Proctor, M.R.E., Lesur, G.: 2010b, A&A 519, A68
- Käpylä, P.J., Korpi, M.J., Ossendrijver, M., Stix, M.: 2006, A&A 455, 401
- Käpylä, P.J., Korpi, M.J., Brandenburg, A.: 2009, A&A 500, 633
- Krause, F., Rädler, K.-H.: 1980, *Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory*, Pergamon Press, Oxford
- Leighton, R.B.: 1969, ApJ 156, 1
- Malkus, W.V.R., Proctor, M.R.E.: 1975, JFM 67, 417
- Matt, S.P., Do Cao, O., Brown, B.P., Brun, A.S.: 2011, AN 332, 897
- Miesch, M.S., Brun, A.S., De Rosa, M.L., Toomre, J.: 2008, ApJ 673, 557
- Moffatt, H.K.: 1978, *Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids*, Cambridge University Press, Cambridge
- Moss, D., Brooke, J.: 2000, MNRAS 315, 521
- Nandy, D.: 2004, Sol. Phys. 224, 161
- Nandy, D., Martens, P.C.H.: 2007, Advances in Space Research 40, 891
- Noyes, R.W., Weiss, N.O., Vaughan, A.H.: 1984, ApJ 287, 769
- Ossendrijver, M., Stix, M., Brandenburg, A.: 2001, A&A 376, 713
- Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S.K., et al.: 2008, MNRAS 388, 80
- Phillips, A., Brooke, J., Moss, D.: 2002, A&A 392, 713
- Pinto, R.F., Brun, A.S., Jouve, L., Grappin, R.: 2011, ApJ 737, 72
- Pipin, V.V., Kosovichev, A.G.: 2011, ApJ 738, 104
- Pizzolato, N., Maggio, A., Micela, G., Sciortino, S., Ventura, P.: 2003, A&A 397, 147
- Reiners, A., Basri, G., Browning, M.: 2009, ApJ 692, 538
- Rempel, M.: 2006, ApJ 647, 662
- Rempel, M.: 2008, Journal of Physics Conference Series 118, 012032
- Saar, S.H.: 2009, in: M. Dikpati, T. Arentoft, I. González Hernández, C. Lindsey, F. Hill (eds.), *Solar-Stellar Dynamos as Revealed by Helio- and Asteroseismology: GONG 2008/SOHO 21*, ASPC 416, p. 375
- Saar, S.H., Brandenburg, A.: 1999, ApJ 524, 295
- Thompson, M.J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2003, ARA&A 41, 599
- Tobias, S.M., Brummell, N.H., Clune, T.L., Toomre, J.: 2001, ApJ 549, 1183
- Wang, Y.-M., Nash, A.G., Sheeley, Jr., N.R.: 1989, Sci 245, 712
- Wang, Y.-M., Sheeley, Jr., N.R., Nash, A.G.: 1991, ApJ 383, 431
- Wright, N.J., Drake, J.J., Mamajek, E.E., Henry, G.W.: 2011, astro-ph/1109.4634
- Yeates, A.R., Nandy, D., Mackay, D.H.: 2008, ApJ 673, 544

## Contents

<b>4.1 Modulation de la rotation différentielle et des cycles magnétiques . . . . .</b>	<b>122</b>
4.1.1 Oscillations torsionnelles . . . . .	122
4.1.2 Modulation de long terme . . . . .	124
4.1.3 Parité dans les simulations en MFDT . . . . .	127
<b>4.2 L'effet Malkus Proctor . . . . .</b>	<b>128</b>
<b>4.3 Tests de validation . . . . .</b>	<b>131</b>
4.3.1 Cœur en rotation en l'absence de champ magnétique . . . . .	132
4.3.2 Champ dipolaire fixe . . . . .	133
4.3.3 Oscillations torsionnelles en dynamo $\alpha\Omega$ . . . . .	134
<b>4.4 Vers un modèle solaire complet . . . . .</b>	<b>138</b>
4.4.1 Influence de la diffusivité à la surface . . . . .	139
4.4.2 Caractéristiques de la rétroaction . . . . .	141
<b>4.5 Variation du taux de rotation . . . . .</b>	<b>144</b>
<b>4.6 Conclusion et perspectives . . . . .</b>	<b>145</b>

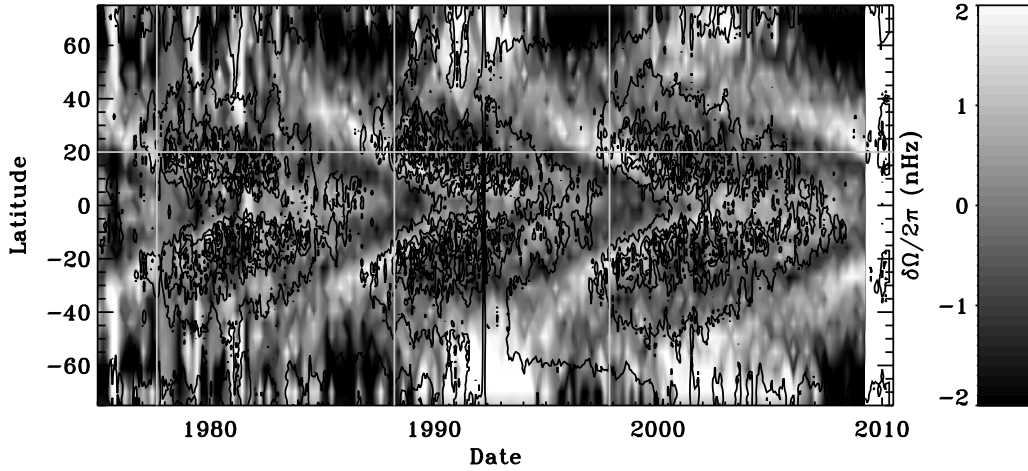
Jusqu'alors, le champ de vitesse était maintenu constant tout au long de la simulation. L'instabilité dynamo était alors saturée par une non linéarité artificielle. Dans ce chapitre, nous traitons de manière plus réaliste cette non linéarité en introduisant la rétroaction du champ magnétique sur la composante longitudinale de la vitesse via la force de Lorentz. C'est l'effet Malkus-Proctor. Après avoir vérifié la bonne implémentation de la nouvelle équation mise en jeu, nous montrerons que nos modèles sont capables d'une part de reproduire les oscillations torsionnelles observées sur le Soleil, mais aussi d'autre part de prédire quelles seraient leurs caractéristiques sur des étoiles à des taux de rotation différents.

## 4.1 Modulation de la rotation différentielle et des cycles magnétiques

### 4.1.1 Oscillations torsionnelles

Dans le chapitre précédent, on a modélisé les cycles magnétiques dans les étoiles grâce à l'approche dynamo en champ moyen en considérant que le champ de vitesse  $\mathbf{v}$  est constant dans le temps (voir néanmoins un exemple de dynamo cinématique où le champ de vitesse n'est pas constant dans le temps

dans [Muñoz-Jaramillo et al., 2010](#)). En réalité, le champ de vitesse varie de façon significative dans le temps, que ce soit la circulation méridienne (par son amplitude, son sens de circulation et son nombre de cellules), ou la rotation différentielle. Cette dernière en particulier, est un ingrédient essentiel dans la dynamo solaire. On s'attend donc à ce que ces variations aient un impact sur l'activité magnétique stellaire.

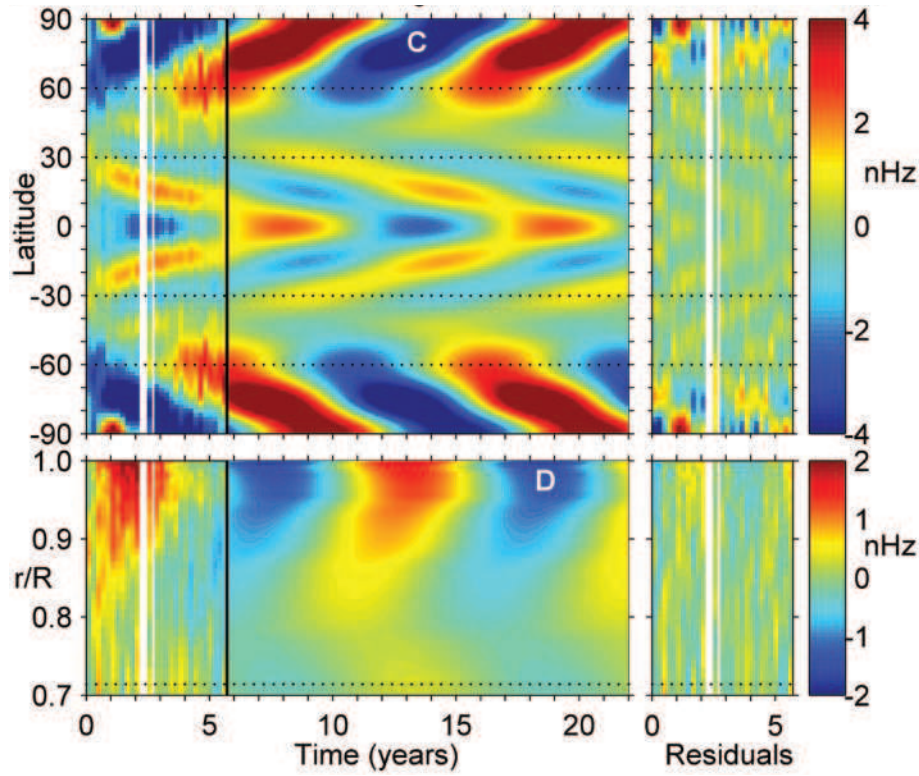


**FIGURE 4.1** – Diagramme temps latitude à la surface du Soleil dans lequel on représente les variations de la rotation différentielle sur les 40 dernières années sur lesquelles on a superposé en contours la norme du champ magnétique. La moyenne temporelle à chaque latitude a été soustraite pour révéler la migration des structures. Crédits : [Howe et al. \(2011\)](#).

En particulier, dans le Soleil, l'amplitude de cette rotation différentielle est légèrement modifiée au cours d'un cycle d'activité. Certaines régions tournent plus rapidement ou plus lentement par rapport à la moyenne (dans le temps) avec des variations  $\delta\Omega$  pouvant atteindre jusqu'à 4-5 nHz (à comparer aux 457 nHz de la rotation à la surface à l'équateur, soit de l'ordre du pourcent). Ces régions apparaissent à moyennes latitudes (vers 45° en latitude) et migrent vers les pôles (pour les régions au delà de 45°) ou l'équateur (en deçà de 45°). On peut alors représenter ces variations dans un diagramme temps-latitude, similaire au diagramme papillon [Figure 1.15](#), dans laquelle la moyenne temporelle a été soustraite pour mieux les mettre en valeur car elles ont une amplitude très faible. Dans la [Figure 4.1](#), on voit très clairement la migration des structures et la périodicité d'environ 11 ans, qui nous fait fortement penser à la durée du cycle des tâches solaires. C'est ce qu'on appelle les oscillations torsionnelles. La régularité de ces variations amènent à penser qu'elles résultent plutôt d'un processus physique lié non linéairement au champ magnétique que d'un phénomène stochastique.

On représente ces mêmes fluctuations  $\delta\Omega$  cette fois dans un diagramme temps-rayon dans lequel on remarque que les fluctuations sont les plus fortes proche de la surface (cf [Figure 4.2](#)). Ces oscillations ont été découvertes grâce à des mesures Doppler à la surface par [Howard and Labonte \(1980\)](#). Leur première détection par hélioséismologie a été réalisée par [Kosovichev and Schou \(1997\)](#) grâce à l'instrument MDI. Depuis, l'hélioséismologie a révélé qu'elles pénètrent profondément dans la zone convective au moins jusqu'à  $0.8R_{\odot}$  ([Howe et al., 2000, 2006; Vorontsov et al., 2002](#)). En dessous de ce rayon, le rapport signal sur bruit devient trop faible pour conclure sur leur existence et leurs caractéristiques.

La forte similitude avec le cycle d'activité porte à croire que ces variations sont liées à l'activité magnétique à grande échelle. De nombreux modèles en dynamo champ moyen ont tenté de reproduire ce phénomène. On pense que les oscillations torsionnelles ont pour origine les interactions non linéaires entre le champ magnétique et la rotation différentielle. Plusieurs modèles sont aujourd'hui en compétition :



**FIGURE 4.2** – *Panneau supérieur* : Variation du taux de rotation  $\delta\Omega$  au cours du temps en  $r = 0.98R_\odot$ . *Panneau inférieur* : Diagramme temps rayon dans lequel on représente les variations de la rotation différentielle à une latitude de  $20^\circ$ . Crédits : [Vorontsov et al. \(2002\)](#).

### Forçage thermique

[Spruit \(2003\)](#) propose que les oscillations torsionnelles soient dues à un écoulement géostrophique. Cet écoulement serait généré par de fortes pertes thermiques induites par le champ magnétique. Il s'agirait donc d'un effet secondaire du champ magnétique et n'implique pas la rétroaction de la force de Lorentz. [Rempel \(2006\)](#) a en effet montré que la rétroaction de la force de Lorentz seule permettrait de ne reproduire que la branche polaire des oscillations torsionnelles (cf [Figure 4.1](#)). Cependant, les effets thermiques seraient nécessaires pour expliquer l'amplitude élevée de la branche équatoriale, abondant dans le même sens que l'analyse de [Spruit \(2003\)](#).

### Rétroaction microscopique de la force de Lorentz

Au contraire, [Kitchatinov and Pipin \(1998\)](#) et [Kitchatinov et al. \(1999\)](#) invoquent la rétroaction de la force de Lorentz du champ magnétique à grande échelle sur la turbulence à petite échelle, affectant alors indirectement les écoulements à grande échelle. Pour cela, on résout l'équation de Navier Stokes (2.19) dans lequel le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  est paramétrisé de manière à reproduire le cas solaire<sup>1</sup>.

$$R_{ij} = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle = 2\nu_t \rho \left( \underbrace{e_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} e_{kk}}_{\text{partie diffusive}} + \underbrace{\Lambda_{ij}}_{\text{effet } \Lambda} \right) \quad (4.1)$$

où l'on a conservé les mêmes notations que pour le tenseur des contraintes (2.6) sauf que  $\nu_t$  est la viscosité cinématique turbulente. Le terme qui paramétrise alors la partie non diffusive du tenseur de Reynolds est appelé effet  $\Lambda$  et dépend du taux de rotation et de la stratification ([Ruediger,](#)

1. On est pour l'instant dans le cas hydrodynamique, c'est-à-dire sans champ magnétique.

1989; Kitchatinov, 2011). Il représente la capacité qu'ont les mouvements convectifs à transporter le moment cinétique pour établir la rotation différentielle (voir par exemple Rempel, 2005b). De nombreuses simulations de la convection ont été menées pour caractériser le tenseur de Reynolds (Kitchatinov and Rüdiger, 2005; Käpylä and Brandenburg, 2008; Käpylä et al., 2011b), avec des résultats parfois en conflit avec les théories analytiques (Kitchatinov and Rüdiger, 1993) à cause de la difficulté à discerner les effets diffusifs des effets non diffusifs (l'effet  $\Lambda$ ) du tenseur de Reynolds. Enfin, en présence de champ magnétique, on doit prendre en compte le tenseur de Maxwell  $M_{ij} = \frac{1}{4\pi} \langle B'_i B'_j \rangle$  qui résulte de la partie fluctuante de la tension magnétique. Dans la littérature, on parle de  $\Lambda$ -quenching (Kitchatinov et al., 1994). Le tenseur des contraintes totales  $T_{ij}$  que l'on doit introduire dans l'équation de Navier Stokes (2.19) est alors :

$$T_{ij} = R_{ij} + M_{ij} = -\rho \langle v'_i v'_j \rangle + \frac{1}{4\pi} \langle B'_i B'_j \rangle \quad (4.2)$$

Il faut alors paramétriser ce terme, tout comme le tenseur de Reynolds. Cependant, sa contribution est encore très mal comprise et on préférera dans notre étude utiliser l'approche suivante.

### Rétroaction macroscopique de la force de Lorentz

La dernière approche consiste à prendre en compte la rétroaction du champ magnétique grande échelle directement sur l'écoulement (en particulier la rotation), c'est l'effet Malkus Proctor (MP) (Malkus and Proctor, 1975). On prend alors en compte la force de Lorentz via une fluctuation du champ de vitesse comme décrit en détails dans la Section 4.2. Une telle rétroaction peut avoir d'autres effets comme modifier la diffusion turbulente et l'effet  $\alpha$  (Vainshtein and Cattaneo, 1992), mais nous ne considérerons pas ces effets dans un premier temps.

#### 4.1.2 Modulation de long terme

On a vu dans la Section 1.6.3 que le fameux cycle de 11 ans n'est pas exactement périodique. L'amplitude mais aussi la durée de ce cycle changent au cours du temps entre chaque cycle, mais aussi sur des périodes de temps beaucoup plus longues. On peut voir nettement ces variations sur la Figure 1.17 dans laquelle on voit apparaître une modulation des cycles magnétiques de l'ordre de 100 ans (cycles de Gleissberg), réduisant le nombre de tâches solaires par un facteur 3. En plus de ces modulations, certaines périodes d'activité magnétique sont particulièrement faibles, ce sont les grands minima comme le minimum de Maunder. Pendant ces périodes de faible activité (et en particulier pendant le minimum de Maunder pendant lequel on ne relève quasiment plus d'activité magnétique), le cycle de 11 ans continue cependant d'exister mais à un niveau beaucoup plus faible (Beer et al., 1998; Usoskin et al., 2001). On pense que ces modulations sont dues à des interactions non linéaires entre le champ magnétique et le champ de vitesse (Sokoloff, 2004; Miyahara et al., 2006).

L'introduction d'une non linéarité dans les équations via la force de Lorentz n'a pas pour seul effet de produire les oscillations torsionnelles. Elle est capable aussi de reproduire ce phénomène de modulation. En effet, le couplage d'équation dynamique de l'évolution du champ de vitesse et de l'équation d'induction peut générer une quasi-périodicité et des modulations. En fait, deux types de modulations existent selon leur nature (Platt et al., 1993a; Tobias, 1997; Knobloch et al., 1998; Tobias, 2002; Spiegel, 2009).

Les modulations de type 1 résultent de l'interaction non linéaire entre les différents modes<sup>2</sup> (dipolaire/quadrupolaire) du champ magnétique via la force de Lorentz. On dit que les modes dipolaires (antisymétriques par rapport à l'équateur) appartiennent à la famille primaire, alors que les modes quadrupolaires (symétriques par rapport à l'équateur) appartiennent à la famille secondaire. Dans les dynamo de type  $\alpha\Omega$  où seule l'équation d'induction est résolue, les propriétés de symétrie du champ magnétique peuvent être prédites. Dans le cas où le champ de vitesse est symétrique par rapport à

2. On parle aussi de parité.

l'équateur et l'effet  $\alpha$  antisymétrique (ce qui est généralement supposé), les modes dipolaires et quadrupolaires du champ magnétique ne sont pas couplés<sup>3</sup>, i.e. chaque mode est une solution linéaire de l'équation d'induction (Roberts and Stix, 1972; McFadden et al., 1991). Par contre, lorsque le champ de vitesse est dynamique, perturbé par la rétroaction non linéaire de la force de Lorentz, ils sont non linéairement couplés, même si les ingrédients physiques possèdent les propriétés de symétrie mentionnées précédemment. Les modes échangent alors de l'énergie via ces perturbations bien que l'énergie cinétique associée ne change pas de manière significative. Leur interaction mène éventuellement à une solution de parité mixte. Comme ces modes ont une fréquence d'excitation différente, les cycles peuvent à la fois exhiber une variation de leur parité mais aussi de leur amplitude (Knobloch and Landsberg, 1996).

Les modulations de type 2 ne requièrent pas une interaction entre les modes comme pour le type 1. Considérons une seule parité (qu'elle soit dipolaire ou quadrupolaire) qui perturbe le champ de vitesse. De l'énergie est alors échangée entre l'énergie magnétique et l'énergie cinétique. Le système agit alors comme un oscillateur amorti dont la période d'amortissement (i.e. la modulation) est définie par le rapport entre la diffusivité magnétique  $\eta$  et la viscosité dynamique  $\nu$  (Tobias, 1997). Nous verrons dans la Section 4.2 que ce nombre sans dimension, le nombre de Prandtl magnétique  $P_m$ , introduit une deuxième échelle de temps qui caractérise le couplage entre le champ magnétique  $\mathbf{B}$  et le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ .

Dans le cas le plus général, les deux types de modulation peuvent agir conjointement et peuvent mener à une riche variété de comportements. Par exemple, dans la Figure 4.3, on montre un exemple de diagramme papillon tiré des travaux de Beer et al. (1998) dans lequel sont présentes à la fois la modulation et la mixité de parité. Dans les deux panneaux, l'activité magnétique est modulée par la présence de grand minima. Dans le panneau supérieur, la solution est dipolaire (asymétrique par rapport à l'équateur) et est affectée par une modulation de type 2 qui la fait passer par des états d'énergie faible. Le panneau inférieur montre que des comportements encore plus complexes peuvent se produire : la solution peut entrer une période de minimum global avec une parité dipolaire et émerger avec une parité quadrupolaire (symétrique par rapport à l'équateur). Le minimum a alors déclenché le renversement de parité. Bien que le Soleil montre aujourd'hui une forte composante dipolaire alignée avec l'axe de rotation, on peut penser qu'il n'en a pas toujours été ainsi<sup>4</sup>. Les données Wilcox Solar Observatory (Scherrer et al., 1977) et MDI (Scherrer et al., 1995) montrent en effet que pendant les phases de renversement de polarité<sup>5</sup>, la composante quadrupolaire domine la composante dipolaire, puisque cette dernière est proche de 0 (De Rosa et al., 2012).

Bien que les modulations de type 2 (dus à la force de Lorentz) soient le modèle le plus privilégié, d'autres mécanismes ont été étudiés :

### Effet $\alpha$ stochastique

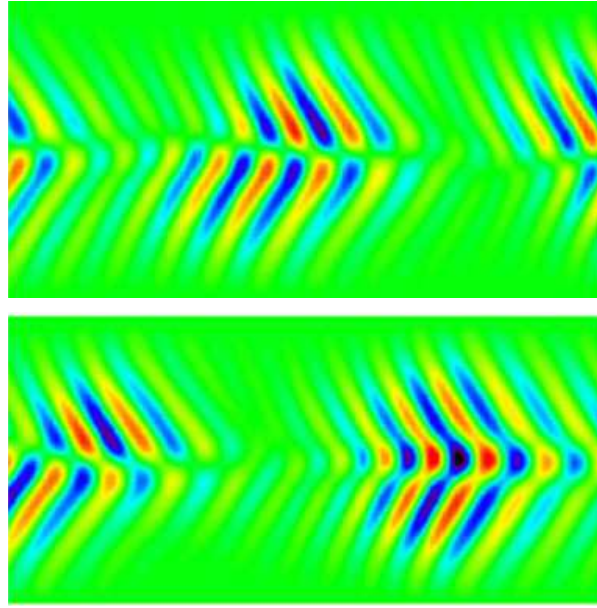
Un autre mécanisme vient de l'hypothèse faite sur l'effet  $\alpha$ . En effet, dans la plupart des modèles, ce dernier est un ingrédient fixe dans le temps. Cependant, Hoyng (1988) montre que les fluctuations du champ magnétique peuvent être suffisamment fortes pour que l'effet alpha puisse varier de manière stochastique. On écrirait alors  $\alpha = \alpha_{\text{mean}} + \alpha_{\text{fluc}}$  où  $\alpha_{\text{mean}}$  est l'effet  $\alpha$  traditionnel émanant de la MFDT et  $\alpha_{\text{fluc}}$  est une composante fluctuante qui était jusqu'alors masquée par la procédure de moyenne faite dans la Section 2.2.4. Ossendrijver and Hoyng (1996) ont alors montré que si  $\alpha_{\text{mean}}$  est telle que le nombre dynamo  $D$  est suffisamment proche du seuil critique

3. Dès que les ingrédients physiques violent ces hypothèses, par exemple en introduisant de légères brisures de symétries, les modes sont couplés et la solution finale est une superposition de modes dipolaires et quadrupolaires (De Rosa et al., 2012).

4. Notons que les méthodes d'observations de l'époque n'étaient pas suffisamment développées pour relever la parité du champ magnétique pendant les périodes de minima.

5. Il est intéressant de noter que la Terre subit également des épisodes de renversement de son champ magnétique (environ tous les 300 000 ans) pendant lesquelles la composante quadrupolaire domine la composante dipolaire (voir la revue récente de Hulot et al., 2010)





**FIGURE 4.3** – Diagrammes papillon (i.e. diagramme temps latitude à la BCZ du champ toroidal positif en rouge et négatif en bleu) montrant les modulations dues à l’interaction non linéaires de la force de Lorentz. *Panneau supérieur* : Les cycles magnétiques sont interrompus à cause de la présence de grand minima récurrents. *Panneau inférieur* : Un minimum d’activité déclenche en même temps un renversement de polarité, la solution transite d’un régime dipolaire à quadrupolaire. Crédits : Tobias (2002)

de la dynamo (cf Section 2.2.5), alors les fluctuations ont un effet crucial. En effet, selon l’amplitude et le signe de  $\alpha_{\text{fluc}}$ , la dynamo peut alterner stochastiquement entre le régime supercritique (énergie magnétique croissante) et subcritique (énergie magnétique décroissante), menant aux modulations comme montrées dans le panneau supérieur de la Figure 4.3. Cependant, notons qu’à cause de la nature aléatoire de la fluctuation, les modulations ne montrent aucune période particulière (Platt et al., 1993b). De plus, lorsque  $D$  devient de plus en plus grand, l’importance de  $\alpha_{\text{fluc}}$  décroît de telle sorte que les modulations diminuent également.

#### Effet $\alpha$ dynamique

Schmitt et al. (1996) propose lui aussi de prendre en compte la nature fluctuante de l’effet  $\alpha$ . Il ajoute également en plus de la composante traditionnelle  $\alpha_{\text{mean}}$  une composante stochastique supplémentaire  $\alpha_{\text{dyn}}$  qui viendrait cette fois de l’instabilité des tubes de flux à la BCZ (processus à l’origine de l’effet Babcock Leighton, cf Section 2.2.3). Lorsque le champ magnétique est suffisamment fort, ces tubes remontent dans la zone convective et acquièrent une torsion à cause de la force de Coriolis<sup>6</sup>, ce qui fournit cette composante  $\alpha_{\text{dyn}}$  supplémentaire. Comme cet effet ne se déclenche uniquement que pour des valeurs de champ magnétique  $B > B_{\text{crit}}$ , on le qualifie d’effet  $\alpha$  dynamique. Ce modèle souffre également de sa nature stochastique, dont l’importance reste incertaine et qui, de plus, ne peut reproduire une périodicité déterministe comme dans les observations.

#### Circulation méridienne stochastique

Enfin, le dernier mécanisme envisagé repose sur la nature fluctuante de la circulation méridienne (Charbonneau and Dikpati, 2000). Dans les modèles à transport de flux de type BL en régime dominé par l’advection, la circulation méridienne joue un rôle crucial liant les sources des champs poloidaux et toroidaux. Cependant, à la fois dans les observations mais aussi dans les simulations

6. C’est ce même effet qui est à l’origine de l’effet  $\alpha$ .

numériques, cette circulation méridienne fluctue fortement dans le temps (cf Section 2.2.3). Charbonneau and Dikpati (2000) ont alors ajouté à l'expression de la circulation méridienne moyenne  $v_{p,\text{mean}}$  une composante fluctuante  $v_{p,\text{fluc}}$ . Encore une fois, comme pour les deux modèles précédents, la nature stochastique de cet effet permet d'expliquer l'intermittence entre chaque cycle mais n'est pas suffisant pour expliquer la régularité des cycles de Gleissberg.

### 4.1.3 Parité dans les simulations en MFD

Comme décrit dans la Section 1.6.3, le champ magnétique solaire possède des propriétés de symétrie particulières. Il est principalement dipolaire mais montre régulièrement une composante quadrupolaire. Les autres étoiles de type solaire semblent exhiber une large variété de configurations magnétiques dépendant entre autres du taux de rotation (cf Section 1.6.2). Des renversements de parité dans d'autres étoiles ont également été détectés grâce à la spectropolarimétrie (Fares et al., 2009). Néanmoins, une autre possibilité de détection, certes plus indirecte, serait de mesurer la modulation des cycles magnétiques qui pourrait résulter de changements de parité, introduisant une seconde période dans l'activité magnétique stellaire (cf Section 4.1.2). De telles périodes secondaires semblent être détectées (Messina and Guinan, 2002; Oláh and Strassmeier, 2002), mais ces variations peuvent être la conséquence aussi bien d'un changement de parité que d'une modulation de l'activité globale.

Cette question a été abordée par de nombreuses études grâce principalement à l'approche MFD (Tobias, 1997; Moss and Brooke, 2000; Bonanno et al., 2002; Hotta and Yokoyama, 2010b; De Rosa et al., 2012). Dans des modèles simples comme la dynamo  $\alpha - \Omega$  (sans rétroaction), la solution peut exhiber une large variété de comportements (Moss et al., 2008) : dipolaire ou quadrupolaire oscillante, ou encore être stable (i.e. non oscillante). La solution peut dépendre du nombre dynamo  $D$  (Bushby, 2006), de la localisation de l'effet  $\alpha$  (Dikpati and Gilman, 2001; Bonanno et al., 2002), ou encore de la forme de la circulation méridienne (Jouve and Brun, 2007; Charbonneau, 2007). De légères fluctuations dans cet espace de paramètre peuvent alors faire passer la solution de dipolaire à quadrupolaire. La préférence du système à choisir une parité plutôt qu'une autre est liée à leur seuil critique respectif. En effet, les solutions dipolaires et quadrupolaires sont, de manière générale, indépendantes l'une de l'autre et ont donc a priori un seuil dynamo (cf Section 2.2.1) différent  $D_{\text{crit}}^{(d)}$  et  $D_{\text{crit}}^{(q)}$  à partir duquel elles croissent de manière exponentielle. Lorsque l'on fixe le nombre dynamo du système  $D$ , la famille qui possède le seuil critique le plus bas est celle qui est la plus amplifiée et qui domine alors le système (e.g. De Rosa et al., 2012).

## 4.2 L'effet Malkus Proctor

Dans tous les modèles considérés dans le Chapitre 3, la non linéarité qui permettait de saturer la dynamo était incluse dans le terme source  $S$  de Babcock Leighton via le terme  $S_{\text{sat}}$  donnée par l'équation (3.19). Dans ce chapitre, on choisit de traiter la saturation de manière plus réaliste en utilisant l'approche de Malkus Proctor, i.e. considérer la rétroaction du champ magnétique à grande échelle directement sur l'écoulement à grande échelle. On développera dans cette section les équations qui affectent l'ensemble des composantes  $(r, \theta, \phi)$  du champ de vitesse  $\mathbf{v}$  pour une question d'exhaustivité, même si en pratique on ne considèrera que la composante longitudinale  $\phi$  dans un premier temps. On se place dans le cas axisymétrique, i.e.  $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ .

Formellement, le champ de vitesse à grande échelle  $\langle \mathbf{v} \rangle$  s'écrit dorénavant :

$$\langle \mathbf{v}(r, \theta, t) \rangle = \Omega_{\text{bg}}(r, \theta) \varpi \hat{\mathbf{e}}_\phi + \mathbf{v}_p + \mathbf{u}(r, \theta, t) \quad (4.3)$$

où  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\theta + \mathbf{u}_\phi$  est la perturbation de vitesse due à l'effet MP et les autres termes sont définis comme dans l'équation (2.34b). On désigne dorénavant la rotation initiale par  $\Omega_{\text{bg}}$  pour bien la distinguer de la perturbation. On suppose que l'évolution de  $\mathbf{u}$  n'est gouvernée que par la rétroaction du champ



magnétique à grande échelle  $\langle \mathbf{B} \rangle$  (via la force de Lorentz) et la viscosité dynamique  $\mu$  (non uniforme dans le cas général). De l'équation (2.10), on en déduit que :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \underbrace{\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \langle \mathbf{B} \rangle) \times \langle \mathbf{B} \rangle}_{\text{force de Lorentz}} + \underbrace{\nabla \cdot \sigma}_{\text{terme visqueux}} \quad (4.4)$$

où  $\sigma_{ij} = 2\mu (e_{ij} - \frac{1}{3} e_{kk} \delta_{ij})$  (cf Section 2.1.1). On retirera dans la suite les signes de moyenne  $\langle \rangle$  pour plus de lisibilité. Dans le cas où le fluide est incompressible, ce tenseur se réduit à  $\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ . Par ailleurs, on peut réécrire la force de Lorentz comme la somme de la pression (qui sera nulle car on suppose l'axisymétrie) et de la tension magnétique :

$$\frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\nabla \left( \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} \quad (4.5)$$

et remarquer que le terme visqueux peut se réécrire comme :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \sigma &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \\ &= \frac{\partial \mu}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \nabla \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) + \mu \Delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (4.6)$$

où  $\nabla \mathbf{u}$  est un tenseur d'ordre 2 et  $\nabla \mathbf{u}^t$  son transposé, dans le cas où le fluide est incompressible. On obtient alors l'équation vectorielle :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) \quad (4.7)$$

On peut maintenant décomposer le champ magnétique  $\mathbf{B}$  selon (2.34a) dans (4.7) et on obtient pour chaque composante  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_\phi)$  :

$$\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \left( \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} \right) + \frac{B_\phi^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} \right] \quad (4.8a)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[ 4 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{4u_r}{r} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \sin \theta A_\phi}{\partial \theta} \left( \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} \right) + \frac{B_\phi^2 \cot \theta}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial B_\phi^2}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (4.8b)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ &+ \frac{\mu}{r} \left[ \frac{2 \cot \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot^2 \theta}{r} + 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \rho \frac{\partial u_\phi}{\partial t} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r\varpi} \left[ \frac{\partial \sin \theta B_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} - \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \frac{\partial \sin \theta A_\phi}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (4.8c)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] + \frac{\mu}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right]$$

Pour mettre en avant les paramètres importants du modèle, on adimensionne les équations de la même façon que dans la Section 2.2.5. On rajoute les quantités adimensionnées supplémentaires (4.9) dues à l'ajout de l'équation de Navier Stokes. Sauf si indiqué explicitement, on prendra  $\rho_0 = 1 \text{ g.cm}^{-3}$ . En particulier, on adimensionne la perturbation de vitesse  $\mathbf{u}$  de la même façon que le champ de vitesse à grande échelle  $\langle \mathbf{v} \rangle$ , c'est-à-dire en adimensionnant séparément la composante  $u_\phi$  de  $u_r$  et  $u_\theta$  :

$$\rho = \rho_0 \rho' \quad (4.9a)$$

$$\mu = \mu_0 \mu' \quad (4.9b)$$

$$u_r = v_0 u'_r \quad (4.9c)$$

$$u_\theta = v_0 u'_\theta \quad (4.9d)$$

$$u_\phi = R_\odot \Omega_0 u'_\phi \quad (4.9e)$$

On obtient alors l'ensemble des équations dans lesquelles on a retiré les symboles primes pour plus de lisibilité puisque toutes les variables sont maintenant adimensionnées :

$$\frac{\partial u_r}{\partial t} = -\frac{\Lambda_p}{\rho} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} \left( \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\varpi^2} \right) + \frac{B_\phi^2}{r} + \frac{1}{2} \frac{\partial B_\phi^2}{\partial r} \right] \quad (4.10a)$$

$$+ \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right. \\ \left. + \frac{\mu}{r} \left[ 4 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{4u_r}{r} - \frac{2u_\theta \cot \theta}{r} + r \cot \theta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\cot \theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = -\frac{\Lambda_p}{\rho} \left[ \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \sin \theta A_\phi}{\partial \theta} \left( \Delta A_\phi - \frac{A_\phi}{\varpi^2} \right) + \frac{B_\phi^2 \cot \theta}{r} + \frac{1}{2r} \frac{\partial B_\phi^2}{\partial \theta} \right] \quad (4.10b)$$

$$+ \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ 2\mu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{\mu}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right. \\ \left. + \frac{\mu}{r} \left[ \frac{2 \cot \theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2u_\theta \cot^2 \theta}{r} + 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{3}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \right\}$$

$$\frac{\partial u_\phi}{\partial t} = -\frac{\Lambda_t}{\rho} \frac{1}{r \varpi} \left[ \frac{\partial \sin \theta B_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial r A_\phi}{\partial r} - \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \frac{\partial \sin \theta A_\phi}{\partial \theta} \right] \quad (4.10c)$$

$$+ \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] + \frac{\mu}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right\}$$

où on a posé  $\Lambda_t$  le nombre d'Elsasser toroidal,  $\Lambda_p$  le nombre d'Elsasser poloidal et  $P_m$  le nombre de Prandtl magnétique définis par :

$$\Lambda_t = \frac{B_0^2}{4\pi \eta_t \rho_0 \Omega_0} \quad (4.11a)$$

$$\Lambda_p = \frac{R_\odot B_0^2}{4\pi \eta_t \rho_0 v_0} \quad (4.11b)$$

$$P_m = \frac{\mu_0}{\rho_0 \eta_t} = \frac{\nu_0}{\eta_t} \quad (4.11c)$$

Le nombre d'Elsasser est le rapport entre la force de Laplace et la force de Coriolis. Autrement dit, il donne une estimation de l'importance relative entre les effets du champ magnétique et ceux de la rotation (cf Table A.2). À partir de maintenant, on ne considèrera que l'équation concernant  $u_\phi$ .

Comme cette équation sera couplée aux équations (2.49), on renormalise également  $A_\phi$  telle que définie par (2.48). Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} = & -\frac{C_\alpha \Lambda_t}{\rho r \varpi} \left[ \frac{\partial \sin \theta B_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial r A_\phi^*}{\partial r} - \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \frac{\partial \sin \theta A_\phi^*}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'effet de Malkus Proctor est la seule non linéarité présente dans les équations (si on enlève les non linéarités artificielles de l'effet  $\alpha$  comme rappelé à l'équation (3.19)). Dans ce cas, on peut montrer que le choix de  $\Lambda_t$  est purement arbitraire (i.e. les équations ne dépendent pas de  $\Lambda_t$ ) en renormalisant une nouvelle fois  $B_\phi$  et  $A_\phi^*$ . La seule contrainte est alors que  $\Lambda_t C_\alpha > 0$  sans quoi la renormalisation (4.13) n'est pas définie. Autrement dit,  $\Lambda_t$  et  $C_\alpha$  doivent être de même signe.

$$\tilde{A}_\phi = \sqrt{\Lambda_t C_\alpha} A_\phi^* = \sqrt{\frac{\Lambda_t}{C_\alpha}} A_\phi \quad (4.13a)$$

$$\tilde{B}_\phi = \sqrt{\Lambda_t C_\alpha} B_\phi \quad (4.13b)$$

Rappelons que dans l'équation (4.13a), le terme  $A_\phi$  est une quantité adimensionnée par  $R_\odot B_0$  de telle sorte que  $\tilde{A}_\phi$  est également une quantité sans dimension. L'ensemble des équations du modèle devient alors :

$$\frac{\partial \tilde{A}_\phi}{\partial t} = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) \tilde{A}_\phi - R_m \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi} \cdot \nabla (\varpi \tilde{A}_\phi) + \alpha \tilde{B}_\phi \quad (4.14a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{B}_\phi}{\partial t} = & \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) \tilde{B}_\phi + \frac{1}{\varpi} \frac{\partial \varpi \tilde{B}_\phi}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \eta}{\partial \theta} \frac{\partial \sin \theta \tilde{B}_\phi}{\partial \theta} \\ & - R_m \varpi \mathbf{v}_p \cdot \nabla \left( \frac{\tilde{B}_\phi}{\varpi} \right) - R_m \tilde{B}_\phi \nabla \cdot \mathbf{v}_p + D \varpi \left[ \nabla \times (\tilde{A}_\phi \hat{\mathbf{e}}_\phi) \right] \cdot \nabla (\Omega_{bg} + \omega) \end{aligned} \quad (4.14b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho r \varpi} \left[ \frac{\partial \sin \theta \tilde{B}_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial r \tilde{A}_\phi}{\partial r} - \frac{\partial r \tilde{B}_\phi}{\partial r} \frac{\partial \sin \theta \tilde{A}_\phi}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.14c)$$

où la rotation différentielle  $\Omega_{bg}$  peut maintenant être perturbée par  $\omega = \frac{u_\phi}{\varpi}$ . On appellera dans la suite  $\Omega_{tot}(\mathbf{r}, t) = \Omega_{bg}(\mathbf{r}) + \omega(\mathbf{r}, t)$ . Finalement, seuls trois paramètres sans dimension gèrent la dynamique :  $R_m$ ,  $D$  et  $P_m$ . Les deux premiers ont toujours le même rôle, i.e.  $R_m$  contrôle l'amplitude de la circulation méridienne alors que  $D$  dont on rappelle la définition dans l'équation (4.15), contrôle l'efficacité de la dynamo.

$$D = C_\alpha C_\Omega = \frac{\alpha_0 \Omega_0 R_\odot^3}{\eta_t^2} \quad (4.15)$$

Le nombre de Prandtl magnétique  $P_m$  est le rapport entre la viscosité cinématique et la diffusivité magnétique<sup>7</sup>. Il s'agit d'une nouvelle échelle de temps du problème puisqu'il définit l'échelle de temps sur laquelle la perturbation de vitesse  $\omega(t)$  évolue. Les profils des ingrédients physiques, en plus de ceux liés au champ magnétique, sont définis par  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $\Omega_{bg}$  et  $\mathbf{v}_p$  et sont normalisés à l'unité. Pour résoudre ces équations, il reste alors à spécifier les conditions initiales et limites à la fois pour le champ magnétique, mais maintenant également pour le champ  $u_\phi$ . La manière exacte dont sont implémentées ces équations dans le code STELEM figure dans l'Annexe B.3.

### 4.3 Tests de validation

Pour vérifier que l'implémentation de cette équation dans STELEM a été bien effectuée, on mène une série de simulations simples qui seront comparées qualitativement (bien qu'une comparaison quantitative serait plus robuste), aux résultats obtenus par Charbonneau and MacGregor (1992) et Covas et al. (2000). Toutes les quantités mentionnées ci-après sont adimensionnées par les quantités données dans la Section 4.2, sauf si explicitement indiqué (en précisant l'unité).

#### 4.3.1 Cœur en rotation en l'absence de champ magnétique

On teste dans un premier temps uniquement la partie diffusive de l'équation (4.14c), c'est-à-dire que les deux composantes du champ magnétique  $\hat{A}_\phi$  et  $\hat{B}_\phi$  sont nulles tout au long de la simulation. Il en est de même pour les processus dynamo  $\alpha$  et  $\Omega_{bg}$ . On se place dans les mêmes conditions physique que dans Charbonneau and MacGregor (1992). Leur but initial était d'étudier le transport de moment cinétique dans l'enveloppe radiative d'une étoile lorsque le cœur est en rotation solide. On ne s'intéressera cependant ici qu'au problème physique fondamental, loin de toutes considérations astrophysiques. Dans ce problème, le cœur est en rotation solide à un taux constant  $\Omega_c = 4.67 \times 10^{-7}$ . On s'attend à ce que le cœur propage, grâce à la viscosité (puisque le champ magnétique est nul), le moment cinétique dans toute l'enveloppe externe de l'étoile jusqu'à atteindre la rotation solide, au même taux de rotation que celle imposée par le cœur.

D'un point de vue numérique, le domaine de simulation couvre un demi anneau prenant en compte les deux hémisphères, i.e.  $\theta \in [0; \pi]$  et  $r \in [R_{int}; R_{ext}] = [0.3; 1.0]$  avec une résolution de  $65 \times 65$ . La rotation est initialement nulle partout sauf à la condition limite en  $r = R_{int}$ . Aucun couple n'est appliqué sur les autres bords.

$$\omega(r = R_{int}) = \Omega_c \quad (4.16a)$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial r} \right|_{r=R_{ext}} = 0 \quad (4.16b)$$

$$\left. \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right|_{\theta=\pi} = 0 \quad (4.16c)$$

On suppose que le viscosité dynamique est constante, c'est-à-dire  $\mu = 1$  et que la densité  $\rho$  est donnée par

$$\rho(r) = \rho_c \exp\left(-\frac{r - R_{int}}{H_\rho}\right) \quad (4.17)$$

où  $\rho_c = 1$  est la densité du cœur et  $H_\rho = 10$ , c'est-à-dire que la densité dépend peu du rayon. Pour que nos simulations soient identiques aux travaux publiés, on choisit les paramètres suivants :

7. Notons que ce nombre est le rapport des valeurs évaluées dans la zone convective, il s'agit d'un nombre réel mais ne renseigne pas sur le profil effectif.

$$C_\alpha = P_m = 1 \quad (4.18a)$$

$$\Lambda_t = 1.4 \times 10^{-3} \quad (4.18b)$$

$$\Omega_0 = \Omega_\odot \quad (4.18c)$$

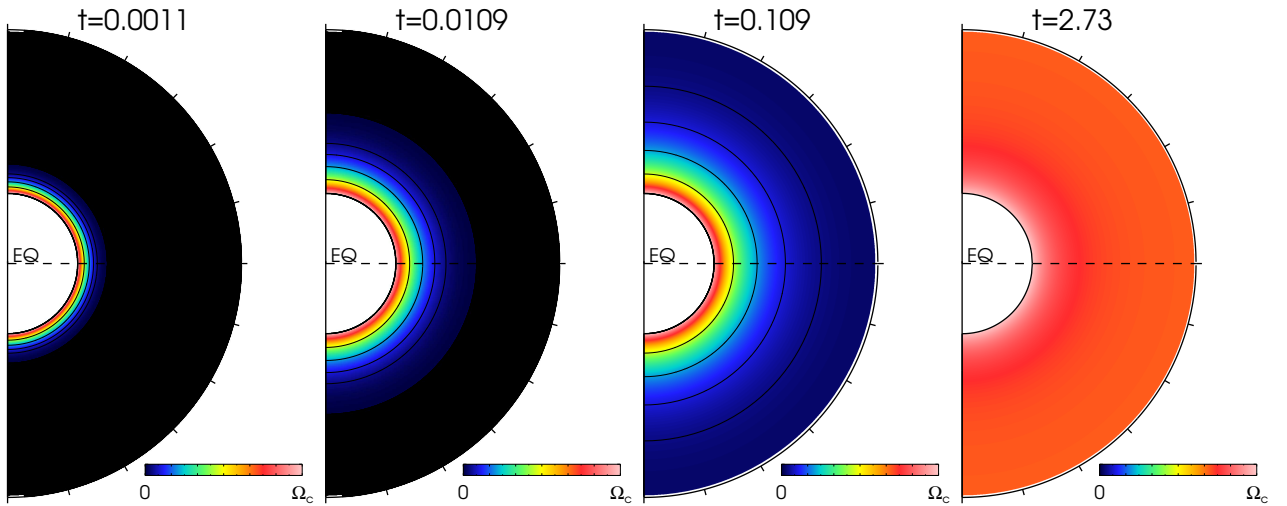
$$\frac{\Omega_\odot}{2\pi} = 456 \text{ nHz} \quad (4.18d)$$

$$\eta_t = 2.0 \times 10^7 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.18e)$$

$$\rho_c = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3} \quad (4.18f)$$

$$B_0 = 1 \text{ G} \quad (4.18g)$$

La **Figure 4.4** montre l'évolution de la rotation  $\omega$  au cours du temps. Dès le début de la simulation, l'enveloppe se met en rotation grâce à la viscosité. La vitesse à laquelle la rotation se propage est alors proportionnelle à la valeur de  $P_m$ . Elle évolue d'abord très rapidement à cause du fort gradient de vitesse à l'interface cœur/enveloppe puis tend vers la rotation solide en quelques temps visqueux  $\tau_\nu = R_\odot^2/\nu$ .



**FIGURE 4.4** – Vue méridienne de l'évolution de  $\omega$  au cours du temps donné en unité de  $\tau_\nu$ . La table de couleur est maintenue constante sur les 4 images.

En conclusion, STELEM reproduit avec succès les résultats de [Charbonneau and MacGregor \(1992\)](#) impliquant uniquement les effets visqueux. Dans l'étape suivante, nous allons tester la partie magnétique de l'équation nouvellement introduite.

### 4.3.2 Champ dipolaire fixe

On introduit maintenant dans la situation précédente un champ magnétique dipolaire maintenu fixe dans le temps (toujours sans processus dynamo  $\alpha$ ) dont l'expression est donnée par :

$$A_\phi = \frac{R_{\text{int}}^3}{r^2} \quad (4.19)$$

Il faut alors ajouter les conditions limites pour le champ magnétique. On n'impose aucun couple sur le champ magnétique aux bords du domaine et le champ est nul le long de l'axe de rotation, ce qui correspond aux conditions limites suivantes sur  $B_\phi$  :

$$B_\phi(r, 0, t) = 0 \quad (4.20a)$$

$$B_\phi(r, \pi, t) = 0 \quad (4.20b)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} [r B_\phi(r, \theta, t)] \right|_{r=R_{\text{ext}}} = 0 \quad (4.20c)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} [r B_\phi(r, \theta, t)] \right|_{r=R_{\text{int}}} = 0 \quad (4.20d)$$

Initialement, les champs dynamiques sont nuls, i.e.  $B_\phi = \omega = 0$ . Dans la [Figure 4.5](#), on représente leur évolution au cours du temps. La présence de champ magnétique modifie qualitativement le comportement de l'enveloppe. Au tout début de la simulation, une onde d'Alfvén se propage à la vitesse  $v_a$  et transporte le moment cinétique du cœur, laissant derrière elle une enveloppe en rotation quasi-uniforme.

$$v_a = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (4.21)$$

Le transport est plus efficace le long des lignes de champ. Cependant, à l'équateur, le champ magnétique est perpendiculaire à la direction de propagation, ce qui empêche dans un premier temps l'accélération des régions équatoriales. Le fort cisaillement de vitesse à l'interface cœur/enveloppe provoque un effet  $\Omega$  très important créant du champ magnétique toroidal. Cet effet n'est pas homogène à toutes les latitudes car l'effet  $\Omega$  est proportionnel à  $\mathbf{B}_{\text{pol}} \cdot \nabla \omega$ . Or proche des pôles, le cisaillement est faible à cause de l'effet de bras de levier, et à l'équateur,  $\mathbf{B}_{\text{pol}}$  et  $\omega$  sont perpendiculaires. L'effet  $\Omega$  est donc faible à ces endroits. Ces processus physiques ont lieu sur des temps alfvéniques  $t_a \ll \tau_\nu$ .

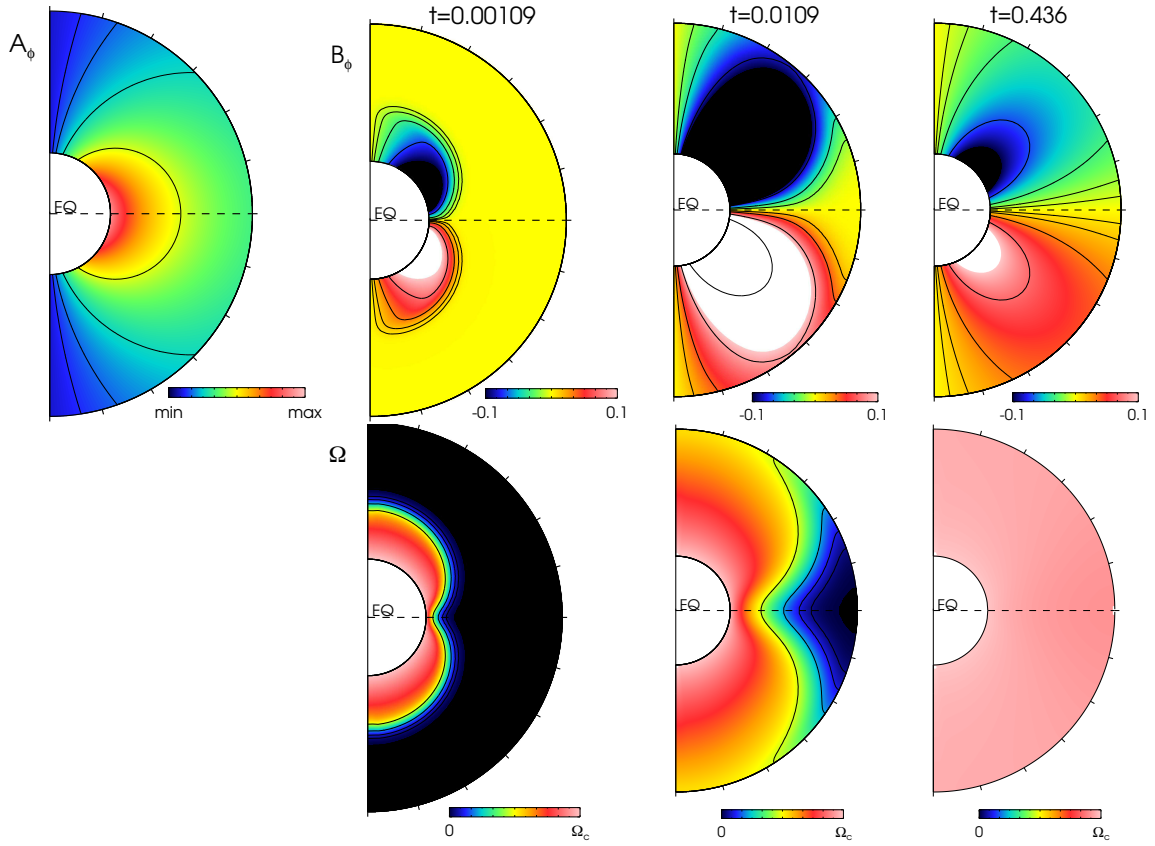
$$t_a = \frac{R_\odot}{v_a} = \frac{R_\odot \sqrt{4\pi\rho}}{B_0} \sim 10^{-3} \tau_\nu \quad (4.22)$$

Puis dans une seconde phase, comme la vitesse s'homogénéise à cause de la viscosité, l'effet  $\Omega$  disparaît et ne peut plus régénérer le champ  $B_\phi$  qui diffuse puis tend vers 0. La force de Lorentz disparaît alors dès que l'une des deux composantes du champ magnétique est nulle, même si  $A_\phi$  reste constant. En l'absence de rétroaction du champ magnétique, le champ de vitesse  $\omega$  évolue alors sur des temps diffusifs. On tend alors vers la rotation solide et un champ magnétique toroidal nul comme dans le cas précédent. Notons que l'état de rotation uniforme est atteint bien plus rapidement que dans le cas sans champ magnétique grâce à la propagation efficace du moment cinétique pendant la première phase. On s'attend à ce que, dans l'état stationnaire, le système suive la loi d'isorotation de Ferraro :

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (4.23)$$

Dans le cas le plus général, l'équation (4.23) indique que la rotation doit être constante le long des lignes de champ. Mais dans notre problème, la condition limite  $\omega = \Omega_c$  sélectionne la solution de rotation uniforme, i.e.  $\nabla \omega = 0$ .

Nous avons, dans cette deuxième partie, montré que STELEM reproduisait fidèlement les résultats obtenus par [Charbonneau and MacGregor \(1992\)](#), et ce dans le cas magnétique. Pour des raisons de concision, nous ne montrons pas ici des tests très similaires qui ont été également effectués sur un champ magnétique quadrupolaire, et qui bien sûr assurent nos conclusions. Nous terminons notre étude en considérant, dans la partie suivante, le couplage entre l'équation d'induction et l'équation de Navier-Stokes.



**FIGURE 4.5** – Coupes méridiennes des champs  $A_\phi$ ,  $B_\phi$  et  $\omega$  au cours du temps. Dans la première colonne, on représente le champ poloidal fixe représenté par les isocontours de la fonction  $A_\phi$ . Puis sur le reste de la première ligne, on représente le champ  $B_\phi$ . L'évolution de  $\Omega$  est représentée sur la seconde ligne.

### 4.3.3 Oscillations torsionnelles en dynamo $\alpha\Omega$

Enfin, on effectue une simulation impliquant les processus dynamo, c'est-à-dire que désormais le champ  $A_\phi$  est libre de varier contrairement aux situations précédentes où il était maintenu fixe. On se place dans le cadre d'une dynamo  $\alpha\Omega$ , dans des conditions similaires à [Covas et al. \(2000\)](#). Leur modèle permet de reproduire l'ensemble des caractéristiques d'un cycle magnétique solaire ainsi que les oscillations torsionnelles. L'ensemble des champs  $A_\phi$ ,  $B_\phi$  et  $\omega$  sont donc maintenant dynamiques.

On simule désormais la zone convective solaire avec une partie de la zone radiative pour capturer les effets de la tachocline, i.e.  $\theta \in [0, \pi]$  et  $r \in [0.64, 1.0]$  avec une résolution de  $97 \times 97$ . On considère que la densité est constante, i.e.  $\rho = 1$  et que la diffusivité turbulente  $\eta_t = 1.0 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

Le long de l'axe de rotation, on impose que  $A_\phi = B_\phi = 0$ . En  $r = R_{\text{int}}$ , on suppose que le champ magnétique décroît vers zéro sur une épaisseur de peau  $\delta = 0.03$  et que l'on a des conditions potentielles en  $r = R_{\text{ext}}$ , i.e. on suppose que la densité est nulle à l'extérieur de l'étoile. Cela se traduit par :

$$\left. \frac{\partial A}{\partial r} \right|_{r=R_{\text{int}}} = \frac{A_\phi}{\delta} \Big|_{r=R_{\text{int}}} \quad (4.24a)$$

$$\left. \frac{\partial \sin \theta B_\phi}{\partial \theta} \right|_{r=R_{\text{ext}}} = \left. \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \right|_{r=R_{\text{ext}}} = 0 \quad (4.24b)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) A_\phi \Big|_{r=R_{\text{ext}}} = 0 \quad (4.24c)$$

Pour  $u_\phi$ , on choisit les conditions limites suivantes :

$$\Omega|_{r=R_{\text{int}}} = 0 \quad (4.25a)$$

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right|_{r=R_{\text{ext}}} = 0 \quad (4.25b)$$

La perturbation de vitesse est initialement nulle et on initialise le champ magnétique avec un dipôle de la forme (4.26), sauf dans la zone radiative, i.e. lorsque  $r < r_c$ , où il est initialement nul.

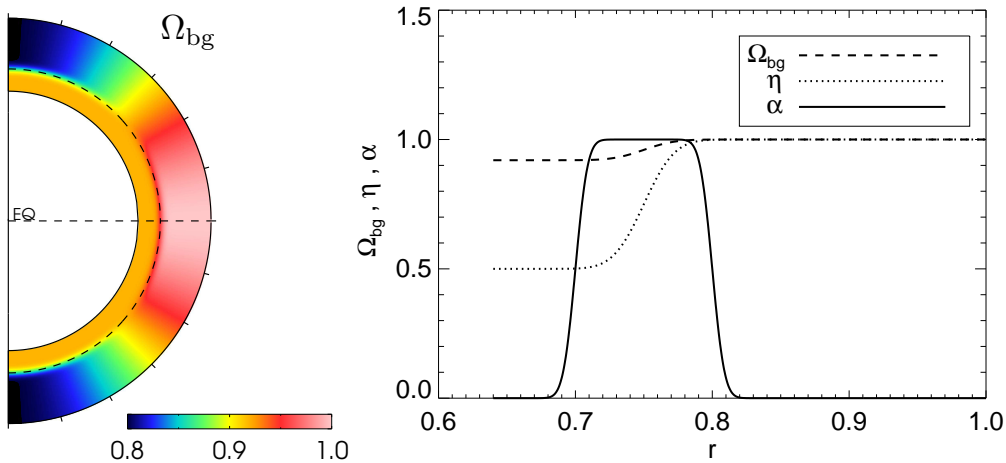
$$A_\phi = \frac{\sin \theta}{r^2} \quad (4.26)$$

Le profil de rotation différentielle  $\Omega_{\text{bg}}$  est donné ici à nouveau par la fonction analytique (3.16) qui mime les données MDI de [Howe et al. \(2000\)](#). La région de cisaillement est alors centrée en  $r_c = 0.75$  et a une épaisseur  $d_1 = 0.025$ . On choisit une rotation de la zone radiative à  $\Omega_c = 0.92$  et  $c_2 = 0.2$ , ce qui correspond à une différence pôles/équateur de 20%.

L'effet  $\alpha$  est confiné à la base de la zone convective, entre  $r_{\alpha_1} = 0.7$  et  $r_{\alpha_2} = 0.8$  et chute rapidement à 0 dans le reste de l'enveloppe en choisissant  $d_2 = 0.01$  dans la formule (4.27). Il est antisymétrique par rapport à l'équateur et positif dans l'hémisphère nord. Le terme  $\frac{3\sqrt{3}}{8}$  est le facteur de normalisation à l'unité.

$$\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{8} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_{\alpha_1}}{d_2} \right) \right] \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_{\alpha_2}}{d_2} \right) \right] \sin^2 \theta \cos \theta \quad (4.27)$$

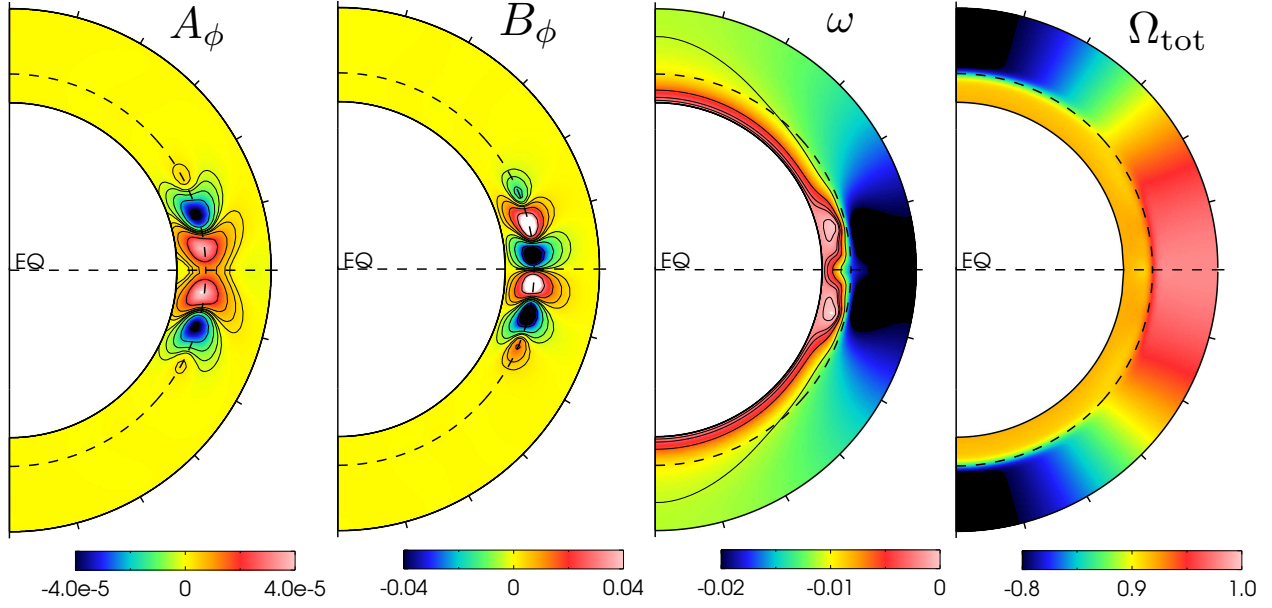
Le profil de diffusivité est similaire à l'équation (3.17), c'est-à-dire constant dans la zone convective et dans la zone radiative, mais avec  $\eta_c = 0.5$ , ce qui représente un saut d'un facteur 2, et dont la transition se fait sur l'épaisseur de la tachocline  $d_1$ . La diffusivité ne dépend pas de  $\theta$ . On représente l'ensemble des profils utilisés dans la [Figure 4.6](#).



**FIGURE 4.6** – *A gauche* : Vue méridienne de la rotation différentielle  $\Omega_{\text{bg}}$ . La ligne en pointillés localise la tachocline en  $r = r_c$ . *A droite* : Profil normalisé à l'unité des ingrédients physiques  $\Omega_{\text{bg}}$  (en tirets),  $\eta$  (en pointillés),  $\alpha$  (en trait plein) en fonction du rayon à la latitude où ils sont chacun à leur valeur maximale, i.e. en  $\theta = \pi/2$  pour  $\Omega_{\text{bg}}$  et  $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$  pour  $\alpha$ .

Les paramètres de simulation sont  $\Lambda_t = 10^4$ ,  $P_m = 1$ ,  $C_\alpha = -1.6$ ,  $C_\Omega = 1.4 \times 10^5$ , ce qui correspond à un taux de rotation solaire. Avec ces choix de paramètres, on atteint rapidement un régime dynamo





**FIGURE 4.7** – Vue méridienne de  $A_\phi$ ,  $B_\phi$ ,  $\omega$  et  $\Omega_{\text{tot}}$ . Les lignes en pointillés localisent la tachocline en  $r = r_c$  et la position de l'équateur.

dans lequel les cycles magnétiques sont dûs à des ondes dynamos qui se propagent dans la tachocline dans une région proche autour de l'équateur (cf [Figure 4.7](#)).

Après une rapide croissance des énergies magnétique poloidale PME et toroidale TME en tout début de simulation, le champ magnétique rétroagit sur la rotation différentielle dont l'énergie associée KE augmente. Les énergies TME, PME et KE sont définies par les équations (4.28) comme l'intégrale dans toute la sphère  $\mathcal{S}$  des champs dynamiques. On finit alors, après une phase de transition de l'ordre d'un temps diffusif  $\tau_\eta = \tau_\nu = R_\odot^2/\eta_t$ , par atteindre un régime stationnaire (cf [Figure 4.8](#)). Le champ magnétique n'est plus ici saturé par un terme non linéaire *ad hoc*, mais par la rétroaction du champ magnétique à grande échelle sur la rotation différentielle via le terme de Malkus Proctor.

$$\text{PME} = \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{8\pi} (B_r^2 + B_\theta^2) dV \quad (4.28a)$$

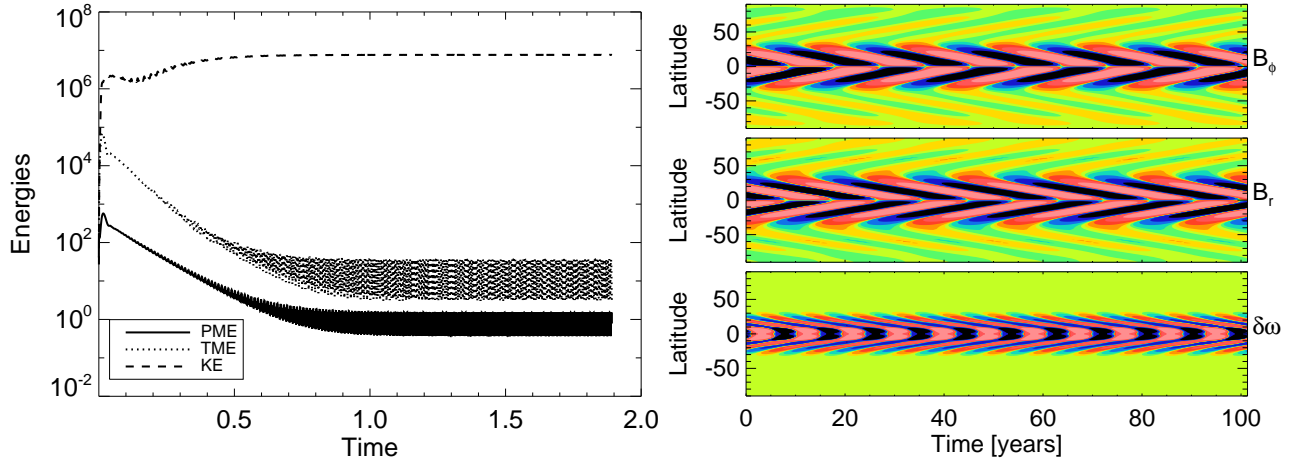
$$\text{TME} = \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{8\pi} B_\phi^2 dV \quad (4.28b)$$

$$\text{KE} = \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{2} \rho u_\phi^2 dV \quad (4.28c)$$

Le terme  $\omega$  réduit partout la rotation ( $\omega \leq 0$ ) et s'adapte en réduisant les contrastes de vitesse (à la fois radiaux et latitudinaux) de manière à diminuer l'effet  $\Omega$  jusqu'à ce que la dynamo atteigne un état d'équilibre avec la diffusion. Il s'agit en effet du seul moyen pour contenir la croissance exponentielle du champ magnétique. Les perturbations de la rotation sont de l'ordre du pourcent, si bien que la rotation totale  $\Omega_{\text{tot}}$  ne semble pas être perturbée. On représente les champs  $B_r$ ,  $B_\phi$  et  $\omega$  dans un diagramme temps latitude en  $r = r_c$  (cf [Figure 4.8](#)). On voit très clairement apparaître un cycle magnétique de période proche de 22 ans, respectant les règles de symétrie et antisymétrie d'un cycle solaire. Comme on peut le voir également dans le panneau supérieur et central de la [Figure 4.7](#), l'activité magnétique est confinée dans une région proche autour de l'équateur, inférieure à une latitude<sup>8</sup>  $\theta_\ell = 45^\circ$  bien qu'il existe une branche polaire plus faible pour des latitudes supérieures à  $45^\circ$ . Ces résultats sont attendus et conformes à la loi de direction de propagation de Yoshimura Parker (cf équation (2.36)). Dans

8. On prendra garde à bien différencier la latitude  $\theta_\ell$  de la colatitude  $\theta$ .

le panneau inférieur, on représente  $\omega$  auquel on a soustrait la moyenne temporelle à chaque latitude (que l'on notera désormais  $\delta\omega$ ), pour mettre en évidence les oscillations torsionnelles au cours d'un cycle magnétique. On remarque que ces oscillations sont symétriques par rapport à l'équateur (contrairement aux cycles magnétiques) et ont une période deux fois plus courte. Notons que l'on définit ici la période de  $\omega$  comme la période d'oscillation de l'amplitude de  $\omega$  à rayon et latitude donnés. Ceci est dû au fait que la force de Lorentz est proportionnelle à  $B^2$ , ce qui rend  $\omega$  insensible au signe du champ magnétique.



**FIGURE 4.8** – *A gauche* : Courbe d'évolution des énergies. *A droite* : Diagramme papillon en  $r = r_c$  représentant du haut vers le bas la composante toroidale  $B_\phi$ , la composante radiale  $B_r$  du champ magnétique puis  $\omega$  dont on a soustrait la moyenne temporelle à chaque latitude (i.e.  $\delta\omega$ ) pour mettre en avant les oscillations torsionnelles. Le code couleur est le même que celui de la Figure 3.6.

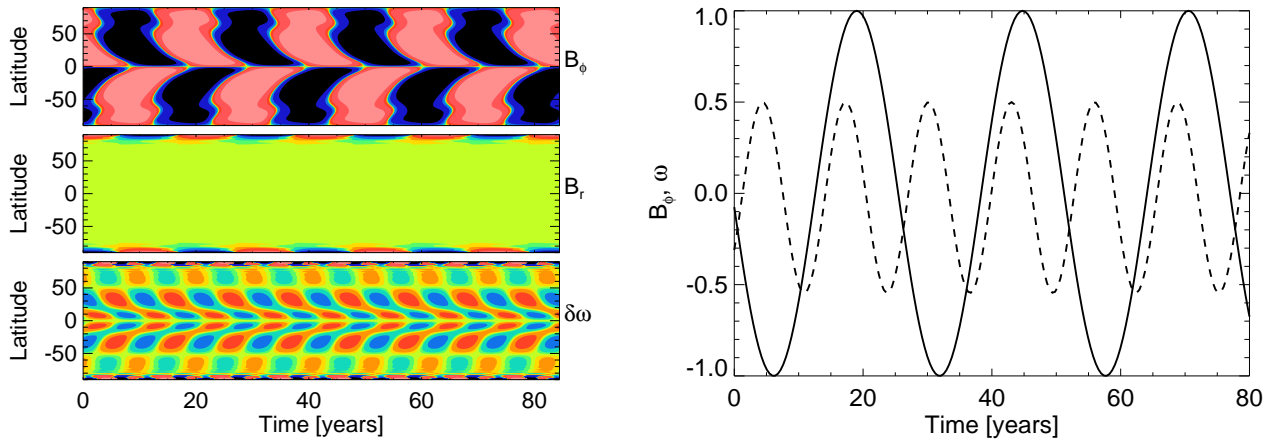
En conclusion, nos simulations sont capables de reproduire avec succès le modèle  $\alpha - \Omega$  de Covas et al. (2000), confirmant la bonne implémentation du couplage entre l'équation d'induction et l'équation de Navier-Stokes. Cependant, ce modèle n'est pas satisfaisant : l'amplitude de ces oscillations s'affaiblit au fur et à mesure que l'on se rapproche de la surface car le champ magnétique y est moins intense. A la surface, elle est alors d'une valeur 100 fois plus faible qu'à la tachocline, ce qui est en contradiction avec les observations décrites à la Section 4.1.1. Par ailleurs, l'effet  $\alpha$  doit avoir un signe négatif dans l'hémisphère Nord pour pouvoir reproduire la migration équatoriale du champ magnétique, ce qui viole la règle de Yoshimura-Parker (cf équation (2.36)). C'est la raison pour laquelle on propose d'inclure l'effet Malkus Proctor dans des modèles dynamos à transport de flux de type Babcock Leighton qui sont les modèles les plus favorisés aujourd'hui.

## 4.4 Vers un modèle solaire complet

Maintenant que l'on s'est assuré que l'on a bien implémenté les équations, on se place dans le cadre d'une dynamo BL- $\Omega$ . On choisit d'utiliser des ingrédients physiques similaires au modèle standard décrit dans la Section 3.4.1 au taux de rotation solaire  $\Omega_\odot$ , sauf que l'on choisit  $\eta_t = 1.0 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , et que l'on ajoute désormais l'effet MP. L'ajout de cet effet nous impose de définir certains paramètres supplémentaires que l'on décrit ci après. Les conditions limites utilisées sont les mêmes que dans le Chapitre 3, c'est-à-dire qu'en  $r = R_{\text{int}}$  on a un conducteur parfait et on choisit des conditions potentielles en  $r = R_{\text{ext}}$ , ce qui se traduit par les équations (3.13) et (3.14).

#### 4.4.1 Influence de la diffusivité à la surface

Dans un premier temps, nous considérons le profil de viscosité le plus simple, c'est-à-dire  $\nu$  constant et égal à la valeur de la diffusivité magnétique de la zone convective  $\eta_t$ . Cela revient à définir  $P_m = 1$ <sup>9</sup>. En choisissant une vitesse de circulation méridienne égale à celle observée, i.e.  $v_0 = 15 \text{ m.s}^{-1}$ , on obtient un cycle magnétique d'environ 22 ans, comme on peut le voir sur la Figure 4.9. De même que dans le cas de la dynamo  $\alpha - \Omega$ , l'énergie magnétique croît puis sature au bout d'un temps de l'ordre de  $\tau_\eta$  et la période des oscillations torsionnelles est d'environ 11 ans, soit la moitié de la période magnétique (cf Figure 4.9), à nouveau à cause de la dépendance en  $B^2$  de la force de Lorentz.



**FIGURE 4.9** – *A gauche* : Diagramme papillon du modèle BL- $\Omega$  dans lequel on représente  $B_\phi$  en  $r = r_c$  dans le panneau supérieur, et  $B_r$  et  $\delta\omega$  en  $r = R_{\text{ext}}$  dans le panneau central et inférieur. Le code couleur est le même que celui de la Figure 3.6. *A droite* : Variations de  $B_\phi$  (trait plein) en  $(r, \theta) = (r_c, \frac{\pi}{4})$  et  $\omega$  (en tirets) en  $(r, \theta) = (1, \frac{\pi}{4})$  en fonction du temps, mettant en avant leurs périodes respectives. Les fonctions  $B_\phi$  et  $\delta\omega$  ont été normalisées à 1 et  $\frac{1}{2}$  respectivement par souci de clarté.

Dans ce type de dynamo, le champ créé à la surface par effet Babcock Leighton est advecté par la circulation méridienne vers les pôles puis vers la tachocline là où l'effet  $\Omega$  agit. Cette fois, la création de champ toroidal est plus homogène en latitude par rapport au modèle de dynamo  $\alpha - \Omega$ . Par contre, il existe un fort contraste d'amplitude du champ magnétique entre les régions très proches des pôles (à une latitude  $\theta_\ell > 80^\circ$ ) et les régions plus proches de l'équateur. On retrouve en conséquence une variation bien plus forte de  $\omega$  aux pôles puisque cette dernière est directement liée à la force de Lorentz, elle même proportionnelle à l'amplitude du champ magnétique. Ce problème est bien connu des modèles de Babcock Leighton en régime dominé par l'advection comme cela a été déjà discuté dans la Section 3.4. En l'absence de pompage magnétique, l'accumulation de flux magnétique transporté par la circulation méridienne ne peut être évacuée de manière efficace.

Cependant, Leighton (1964) a été le premier à proposer qu'une diffusion plus élevée opère là où la supergranulation existe, c'est-à-dire dans les couches superficielles de la zone convective, pour expliquer la vitesse de dissipation des régions magnétiques. Wang et al. (1989b) et Schrijver (2001) estiment que la diffusion magnétique doit être de l'ordre de  $(2 - 4) \times 10^{12} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ . On modélise alors dorénavant la diffusivité magnétique  $\eta$  par la formule (4.29) (cf Figure 4.10) de la même façon que dans Dikpati and Gilman (2007b), Yeates et al. (2008), Hotta and Yokoyama (2010a) ou Muñoz-Jaramillo et al. (2011) :

$$\eta = \left[ \eta_c + \frac{1}{2} (1 - \eta_c) \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_c}{d_1} \right) \right] \right] \left[ \eta_a + \frac{1}{2} (1 - \eta_a) \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{r - r_a}{d_3} \right) \right] \right] \quad (4.29)$$

9. Notons cependant que cela ne signifie pas que le profil du nombre de Prandtl soit constant le long du rayon.

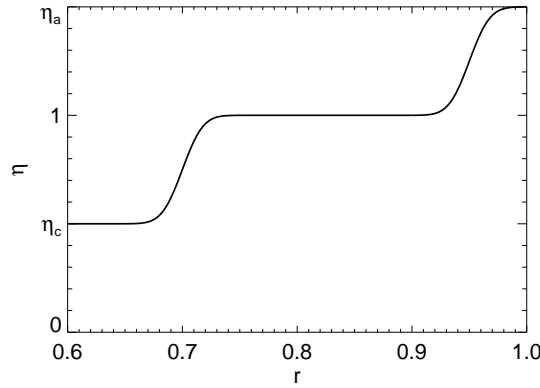


FIGURE 4.10 – Profil de diffusivité pour une valeur  $\eta_c$  et  $\eta_a$  quelconque.

où  $r_a = 0.975$  et  $d_3 = 0.02$ . Notons que dans le cas où  $\eta_a = 1$ , on se retrouve dans le même cas que précédemment. En augmentant la valeur<sup>10</sup> de  $\eta_a > 1$ , le rapport entre de l'amplitude du champ magnétique entre les pôles et l'équateur est de plus en plus faible grâce à la diffusion qui transporte radialement le champ magnétique, comme on peut le voir sur la Figure 4.11. On compare en  $r = R_{\text{ext}}$  le rapport entre le maximum de  $B_r$  proche des pôles ( $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$ ) et proche de l'équateur ( $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ ), en fonction de la valeur de  $\eta_a$ . On voit que l'augmentation de la diffusion à la surface diminue fortement ce rapport traduisant l'efficacité du transport diffusif des pôles vers les autres régions de l'étoile. L'extension latitudinale est aussi affectée : lorsque  $\eta_a = 1$ , le champ fort est confiné dans une bande très étroite proche des pôles entre  $80^\circ$  et  $90^\circ$  alors qu'il est présent jusqu'à  $70^\circ$  lorsque  $\eta_a = 20$ .

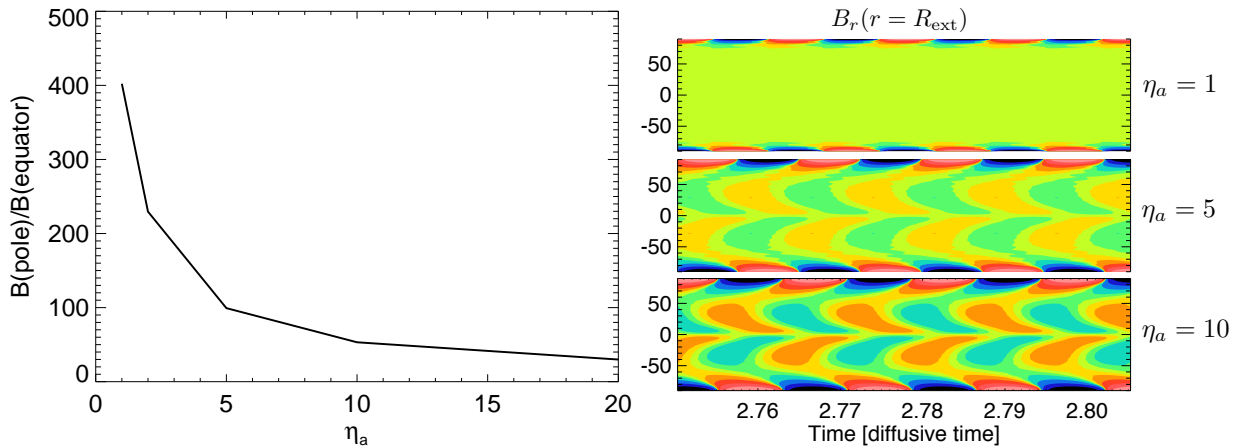


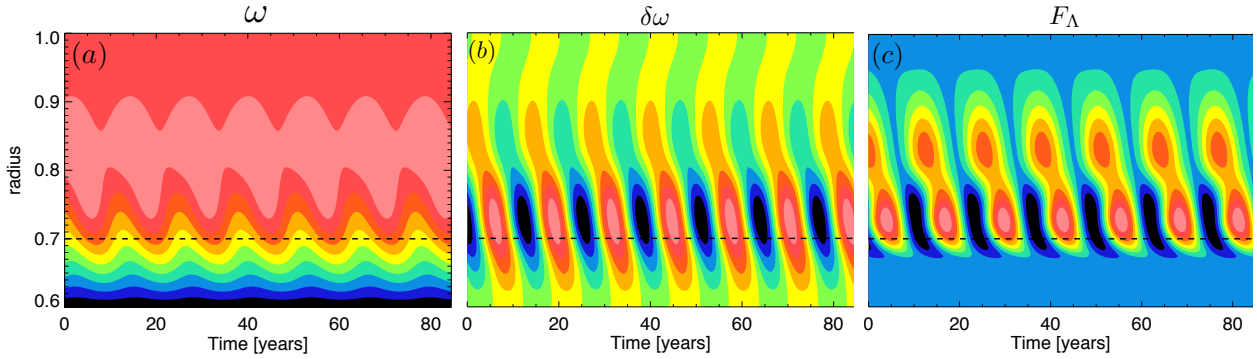
FIGURE 4.11 – *A gauche* : Rapport entre le maximum de champ magnétique  $B_r$  à la surface proche des pôles ( $\theta < 45^\circ$ ) et proche de l'équateur ( $45^\circ < \theta < 90^\circ$ ), en fonction de  $\eta_a$ . *A droite* :  $B_r(r = R_{\text{ext}})$  avec du haut vers le bas  $\eta_a = \{1, 5, 10\}$ .

#### 4.4.2 Caractéristiques de la rétroaction

On choisit d'utiliser  $\eta_a = 20$  qui correspond à la valeur déduite des observations. Dans la Figure 4.12, on représente dans un diagramme rayon-latitude successivement  $\omega$ ,  $\delta\omega$  et la force de Lorentz  $F_\Lambda$ . Intéressons nous tout d'abord à  $\omega$ . On voit que le diagramme est découpé en plusieurs zones. En dessous de la tachocline, le champ magnétique est quasi nul. Le champ  $\omega$  n'existe donc dans la zone radiative que principalement grâce à la viscosité. On retrouve donc le fait que  $\omega$  pénètre dans la RZ

10. Rappelons que  $\eta_a$  est normalisée à  $\eta_t = 1.0 \times 10^{11} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

mais tend progressivement vers 0, c'est-à-dire la condition limite. Au milieu de la CZ ( $0.7 < r < 0.9$ ), la force de Lorentz est particulièrement intense, ce qui provoque de fortes valeurs de  $\omega$ . Et enfin proche de la surface ( $r > 0.9$ ),  $\omega$  est légèrement plus faible, à cause de la quasi absence de la force de Lorentz. Dans cette zone, le champ  $\omega$  diffuse et reste à peu près constant à cause de la condition sans couple à la surface.



**FIGURE 4.12** – Diagrammes temps rayon du modèle BL- $\Omega$  dans lesquels on représente dans les panneaux (a)  $\omega$ , (b)  $\delta\omega$  et (c) la force de Lorentz  $F_\Lambda$ , en  $\theta = 10^\circ$ . Dans chaque panneau, la ligne horizontale en tirets représente la tachocline.

Si l'on s'intéresse à  $\delta\omega$ , on retrouve une forte corrélation avec la force de Lorentz qui lui donne naissance. En  $r \simeq 0.85$ , les variations de  $\omega$  sont créées puis migrent vers la profondeur de l'étoile car elle suivent l'advection du champ magnétique imposée par la circulation méridienne. On remarque néanmoins que la région où les fluctuations sont les plus fortes sont légèrement au dessus de la tachocline en  $r \simeq 0.73$ . En effet, lorsque l'on regarde où la force de Lorentz agit, on voit qu'en fait cette force est la plus forte dans cette même région. Ceci est dû au fait que la force de Lorentz est sensible au gradient de champ magnétique et non directement à l'amplitude du champ magnétique lui même. Puis, une fois arrivée à la tachocline, en  $r = r_c$ , en l'absence de la force de Lorentz,  $\delta\omega$  décroît vers 0. Une autre partie de ces fluctuations migrent vers la surface grâce à la viscosité. Les oscillations que l'on détecte à la surface du Soleil seraient alors une manifestation des fortes oscillations générées plus profondément dans la zone convective. On voit alors que toute fluctuation  $\delta\omega$  que l'on trouve à la surface est en fait due : soit aux perturbations créées au cœur de la zone convective et qui ont migré vers la surface par viscosité, soit à la force de Lorentz localement en surface. Cette description semble a priori s'opposer aux observations de la Figure 4.2. Cependant, dans ces modèles, comme expliqué dans la Section 3.4.1, la tachocline est un traceur de ce qui se passe en surface, puisque l'on ne résoud pas l'émergence dynamique du champ magnétique à travers la zone convective.

On représente dans la Figure 4.13 les mêmes champs que dans la Figure 4.7 mais pour la dynamo BL- $\Omega$ . La dépendance spatiale de ces champs est sensiblement différente du cas de la dynamo  $\alpha - \Omega$ . Le champ poloidal est transporté à la fois par la circulation méridienne à la surface mais aussi par la diffusion qui a un rôle important à la surface en transportant radialement le champ. Le champ  $\omega$  tend à réduire la rotation différentielle latitudinale en accélérant les pôles et en ralentissant l'équateur. La valeur de  $\omega$  n'est en moyenne que de quelques pourcents mais atteint aux pôles une amplitude de presque 3% de la rotation à l'équateur, ce qui réduit la rotation différentielle latitudinale de 20% à 17%. En dessous de la tachocline, la rétroaction est faible puisque le champ magnétique n'y pénètre que par diffusion avec de plus une vitesse faible proportionnelle à  $\eta_c \ll \eta_t$ , puis tend vers la condition limite nulle en  $r = R_{\text{int}}$ .

On représente le diagramme temps-latitude de ce modèle dans la Figure 4.14. Malgré la diffusivité élevée dans les couches supérieures de la zone convective, le champ poloidal continue d'être advecté



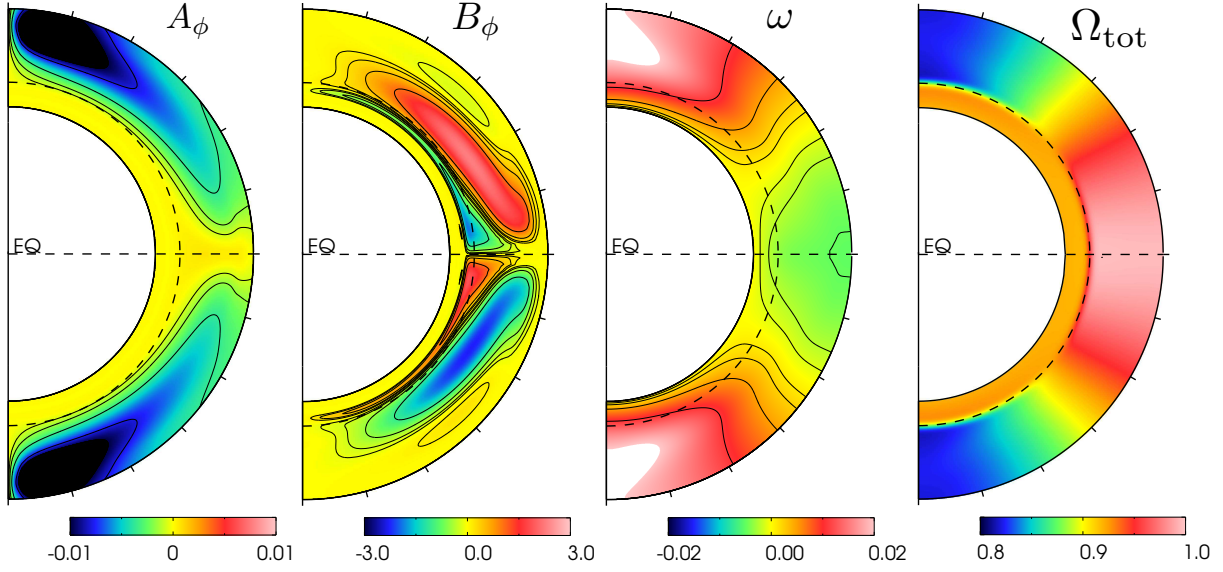


FIGURE 4.13 – Idem que la Figure 4.7 mais pour le cas BL- $\Omega$  et  $\eta_a = 20$

efficacement par la circulation méridienne, ce qui résulte en une branche polaire à la surface. Comme montré dans la Section 4.4.1, le rapport de l'amplitude du champ entre les régions polaires et équatoriales est relativement faible, environ 30. A la base de la zone convective, le champ toroidal présente à la fois une branche équatoriale et une branche polaire en accord avec les observations avec une période magnétique d'environ 22 ans.

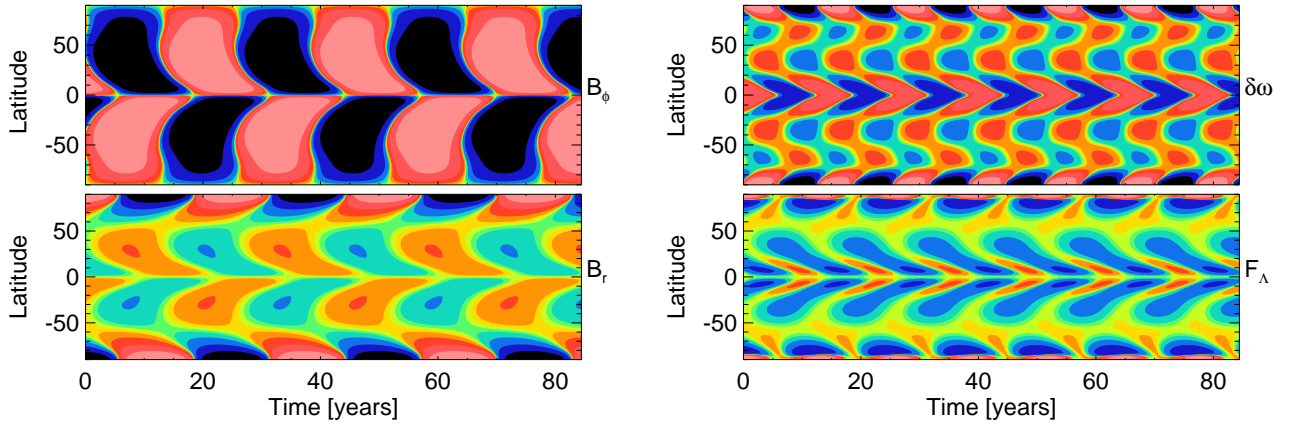


FIGURE 4.14 – *A gauche* : Idem que les deux premiers panneaux de la Figure 4.9 pour le cas  $\eta_a = 20$ . *A droite* : on représente  $\delta\omega$  et l'amplitude de la force de Lorentz  $F_\Lambda$ , en  $r = R_{\text{ext}}$ .

Alors que les caractéristiques du cycle magnétique obtenus sont fidèles aux caractéristiques solaires, on se demande à présent si ce modèle reproduit également les oscillations torsionnelles (cf Figure 4.1). Pour comparer notre modèle directement aux observations, on peut a priori comparer directement  $\delta\omega$  en  $r = R_{\text{ext}}$  (cf Figure 4.14). En latitude, les régions de plus fortes variations (environ 0.05%, soit 0.23 nHz) sont localisées autour des pôles ( $\theta_\ell > 80^\circ$ ) et de l'équateur ( $\theta_\ell < 20^\circ$ ), là où la force de Lorentz est d'amplitude la plus élevée. On note deux branches distinctes apparaissant vers  $\theta_\ell \simeq 45^\circ$  : l'une se dirige vers l'équateur alors que la deuxième se dirige vers les pôles. Dans nos simulations, l'amplitude de ces perturbations est beaucoup plus faible que celle observée car elle résulte des fluctuations localisées plus profondément dans la zone convective et de la force de Lorentz locale mais qui est bien plus faible qu'à

la BCZ (cf Figure 4.12).

Rappelons que l'on a représenté dans la Figure 4.14 la composante toroidale du champ magnétique  $B_\phi$  en  $r = r_c$ , i.e. à la tachocline, comme proxy des tâches solaires à la surface (cf Section 3.4.1). Dans nos modèles, nous avons donc supposé que ce qui se passe à la tachocline dans nos simulations, est représentatif de ce qui se passe en surface dans les observations. Or, les écoulements de surface peuvent être influencés par l'émergence des tubes de champ magnétique (e.g. Jouve and Brun, 2009), à l'origine des tâches solaires. Il faut donc en fait comparer les observations de la surface à  $\delta\omega$  en  $r = r_c$ , ce que l'on représente dans la Figure 4.15.

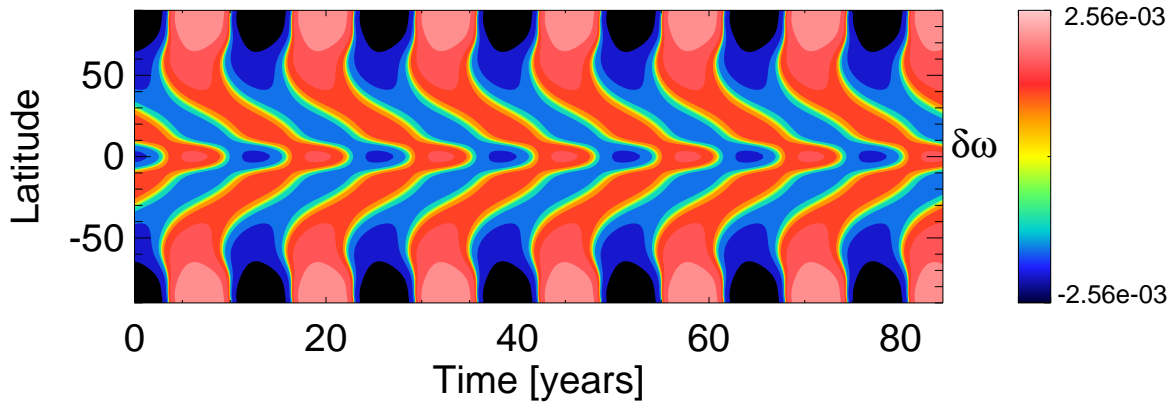


FIGURE 4.15 –  $\delta\omega$  en  $r = r_c$ .

En  $r = r_c$ , la variation  $\delta\omega$  a une structure que l'on peut découper en 2 branches :

- $\theta_\ell > 45^\circ$  : à haute latitude, on retrouve une branche polaire dont l'amplitude maximale atteint  $\delta\omega = 1.1$  nHz. Notons que la pente est moins prononcée que dans les observations.
- $\theta_\ell < 45^\circ$  : à moyenne latitude, on retrouve une branche équatoriale dont l'origine débute vers  $\theta_\ell \simeq 45^\circ$ , mais dont l'amplitude est plus faible, de l'ordre de  $\delta\omega \simeq 0.1$  nHz.

Ces variations sont qualitativement comparables aux observations de la Figure 4.2, bien que leur amplitude soit légèrement plus faible. Ceci peut être dû entre autres à notre choix de viscosité  $\nu = \text{cst}$  qui a tendance à atténuer les fortes variations, alors que l'on s'attend à une chute de viscosité à la tachocline de la même manière que pour la diffusivité magnétique.

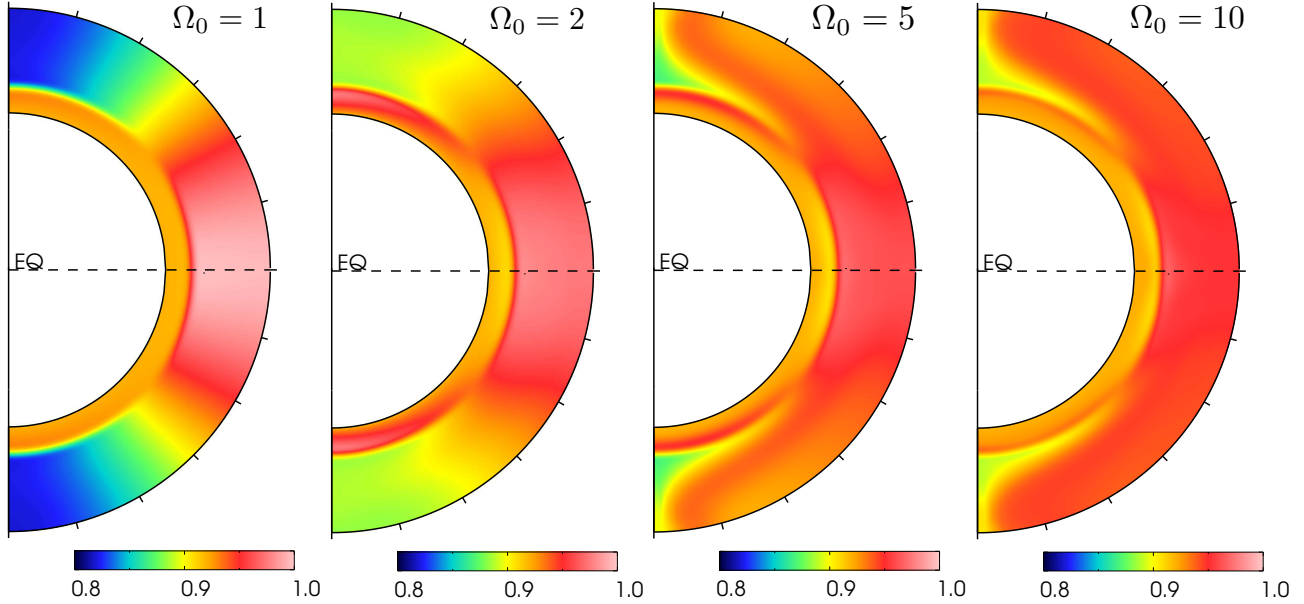
Notons que contrairement à Rempel (2007), les branches polaire et équatoriale sont bien distinctes et ont des amplitudes comparables, sans avoir besoin d'invoquer des processus thermiques comme le propose Spruit (2003). En fait, cette différence provient du choix de notre profil de diffusivité. Comme expliqué dans la Section 4.4.1, la prise en compte d'une diffusion magnétique augmentée par la supergranulation permet de réduire l'accumulation de flux magnétique proche des pôles. En conséquence, la force de Lorentz a une amplitude moindre et génère des fluctuations de  $\omega$  moins contrastées par rapport à l'équateur. Les deux branches polaire et équatoriale sont donc forcées par des effets "mécaniques", i.e. la force de Lorentz, sans invoquer des effets thermiques comme expliqué dans la Section 4.1.1.

## 4.5 Variation du taux de rotation

On s'interroge maintenant sur l'effet de la variation du taux de rotation entre  $1\Omega_\odot$  et  $10\Omega_\odot$ , avec une circulation méridienne maintenue fixe. En pratique, cela revient à faire varier le nombre dynamo  $D$ . On adapte alors le nombre d'Elsasser toroidal  $\Lambda_t$  en conséquence comme l'indique l'équation (4.11a), bien que ce dernier puisse avoir une valeur arbitraire (comme discuté dans la Section 4.2), pour pouvoir comparer les valeurs de champ magnétique entre les simulations. Augmenter le nombre dynamo implique que l'effet dynamo est plus efficace pour générer du champ magnétique. Pour des taux de



rotation inférieurs à  $\Omega_0 = 1\Omega_\odot$ , le nombre dynamo  $D$  se trouve sous le seuil critique et la solution décroît par diffusion jusqu'à zéro. En revanche, pour  $\Omega_0 > \Omega_\odot$ , l'augmentation du nombre dynamo a des conséquences très fortes sur la solution comme on peut le voir sur la [Figure 4.16](#).



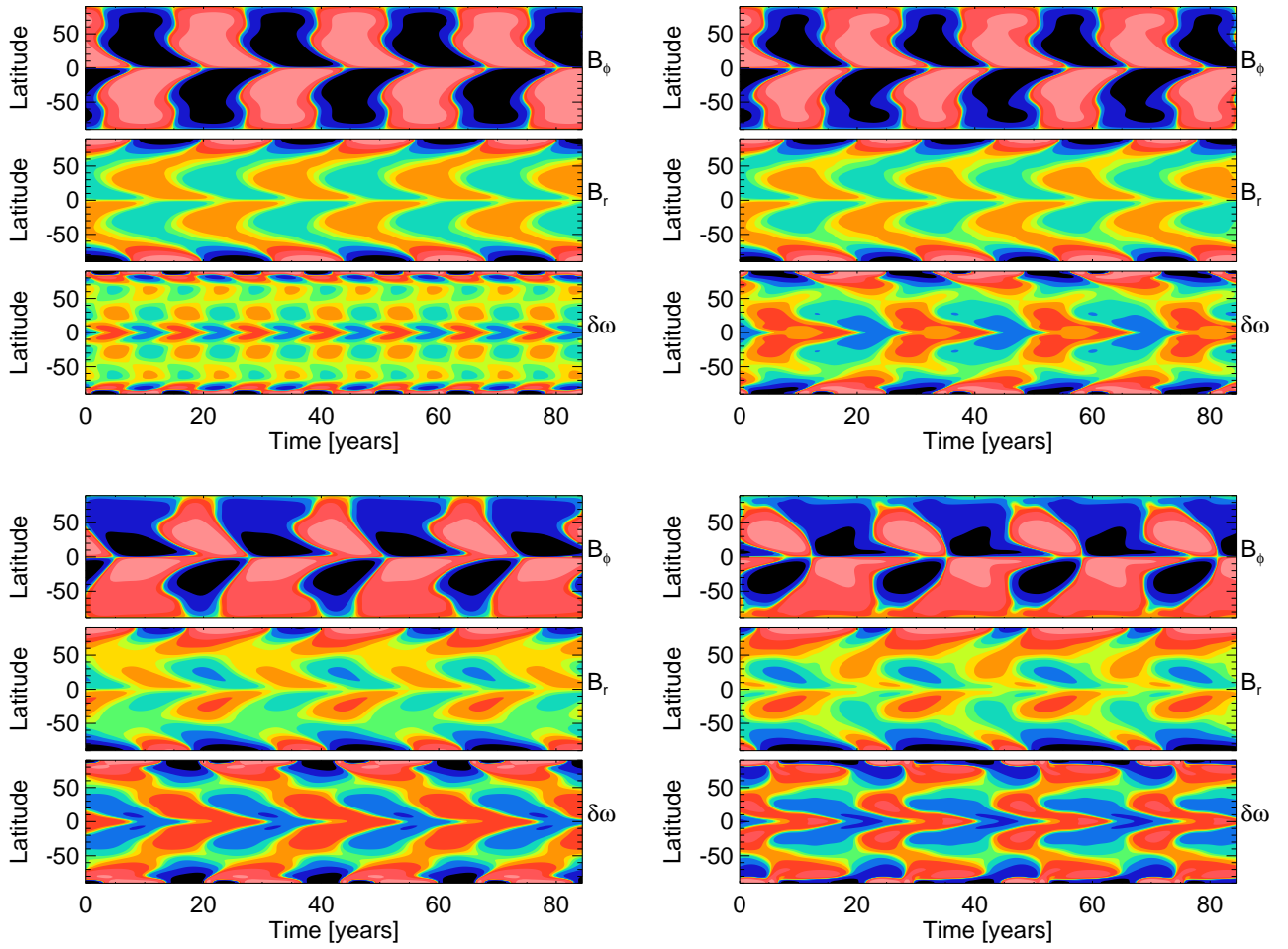
**FIGURE 4.16** –  $\Omega_{\text{tot}}$  pour différentes valeurs de  $\Omega_0 = \{1, 2, 5, 10\}\Omega_\odot$ .

Lorsque le taux de rotation augmente, l'effet  $\Omega$  devient plus efficace, augmentant alors l'énergie magnétique. Il en est de même pour la force de Lorentz puisque son amplitude est directement proportionnelle à l'énergie magnétique. En conséquence, l'amplitude de  $\omega$  augmente également et réduit d'autant plus la rotation différentielle initiale  $\Omega_{\text{bg}}$ , à la fois radialement et latitudinalement, en accélérant les pôles et la zone radiative. Dès  $\Omega_0 = 2\Omega_\odot$ , le profil de rotation est largement affecté avec un renversement du signe du gradient de  $\Omega_{\text{tot}}$  pour des latitudes  $\theta_\ell > 45^\circ$ .

On retrouve cette différence de comportement dans les diagrammes papillon de la [Figure 4.17](#). Lorsque le taux de rotation  $\Omega_0 \leq 3\Omega_\odot$ , la solution est proche de celle décrite dans la [Section 4.4.2](#) : le champ magnétique toroidal à la BCZ possède une branche équatoriale et polaire et les variations de  $\omega$  ont une période deux fois plus courte que la période magnétique. La période de cycle magnétique n'est que peu affectée. Cependant pour des taux de rotation plus élevés, la solution transite vers un autre régime dans lequel la symétrie d'un cycle à l'autre est rompue, que ce soit pour le champ magnétique ou pour  $\omega$ . La solution perd alors le doublement de périodicité de  $B_\phi$  par rapport à  $\omega$ .

## 4.6 Conclusion et perspectives

Dans le [Chapitre 3](#), nous avons étudié la variation des propriétés magnétiques globales des étoiles en utilisant l'approche MFDT cinématique, c'est-à-dire sans prendre en compte la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse du fluide. Dans ce Chapitre, nous avons implémenté l'effet Malkus-Proctor dans le code STELEM (cf [Section 4.2](#) et [B.3](#)) qui nous permet de prendre en compte la rétroaction macroscopique de la force de Lorentz sur la composante longitudinale du champ de vitesse. La rotation différentielle est alors libre de s'adapter à la présence de champ magnétique, rendant les simulations plus réalistes. Pour nous assurer de sa bonne implémentation, nous avons effectué une série de tests en comparant nos résultats à ceux de [Charbonneau and MacGregor \(1992\)](#) et [Covas et al. \(2000\)](#), que nous avons pu reproduire avec succès (cf [Section 4.3](#)).



**FIGURE 4.17** – Diagrammes papillons identiques à la [Figure 4.9](#) pour plusieurs taux de rotation  $\Omega_0 = \{3, 4, 6, 10\}\Omega_\odot$ .

Alors que la plupart des travaux (e.g. [Tobias, 1996, 1997](#); [Küker et al., 1999](#); [Covas et al., 2000](#); [Moss and Brooke, 2000](#); [Brooke et al., 2002](#); [Covas et al., 2005](#); [Bushby, 2005, 2006](#)) se sont concentrés sur l’étude de l’effet Malkus-Proctor sur les dynamos  $\alpha - \Omega$ , nous avons choisi d’explorer ses effets dans les dynamos de type BL- $\Omega$  qui sont les modèles les plus favorisés à ce jour. Nos simulations sont en ce sens similaire aux simulations de [Rempel \(2006\)](#) et [Rempel \(2007\)](#), sauf que l’on n’a pas considéré les fluctuations de  $v_r$  et  $v_\theta$ .

Nous nous sommes intéressés au cas le plus simple dans lequel  $\nu = \text{cst}$  dans l’ensemble de notre domaine de résolution. De même que dans les dynamos  $\alpha - \Omega$ , la croissance exponentielle de l’énergie magnétique est désormais saturée de manière cohérente par la rétroaction de la force de Lorentz. La fluctuation  $\omega$  associée à la force de Lorentz s’adapte globalement en réduisant la rotation différentielle, i.e. elle diminue l’efficacité de l’effet  $\Omega$  puisque c’est la seule manière de réduire l’effet dynamo en l’absence d’une saturation artificielle comme dans le [Chapitre 3](#). Dans le cas à 1 rotation solaire, proche du seuil dynamo, l’amplitude de  $\omega$  est de l’ordre de quelques pourcents, altérant peu le profil de rotation différentielle initial  $\Omega_{\text{bg}}$ . Notons que la question de l’interaction entre le champ magnétique et la rotation différentielle peut être étudiée grâce également aux simulations 3D (e.g. [Brum, 2004](#))

Dans ces modèles, le champ magnétique poloidal est fortement concentré aux pôles à la surface. Cependant, lorsque l’on prend en compte l’augmentation de la diffusivité proche de la surface due à la supergranulation ( $\eta_a = 2.0 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ), la diffusion devient un processus suffisamment efficace pour transporter le champ radialement. Le rapport entre l’amplitude du champ magnétique radial à

la surface entre les pôles et l'équateur passe de 400 lorsque  $\eta_a = 1.0 \times 10^{11} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$  à 30 lorsque  $\eta_a = 2.0 \times 10^{12} \text{ cm}^2.\text{s}^{-1}$ . Les modèles de type BL- $\Omega$  peuvent alors reproduire les cycles magnétiques avec des caractéristiques solaires.

Si l'on s'intéresse à la variation de  $\omega$  en retirant la moyenne temporelle, on constate que cette variation  $\delta\omega$  possède des caractéristiques bien particulières. Une caractéristique importante est qu'elle présente une période de 11 ans, c'est-à-dire la moitié d'une période magnétique. En effet, elle doit son origine directement à la force de Lorentz qui est proportionnelle à  $B^2$  et qui est donc insensible au signe du champ magnétique. L'amplitude de  $\delta\omega$  est donc corrélée à l'amplitude de la force de Lorentz qui est plus élevée au cœur de la zone convective, loin de la surface, et est également plus élevée proche des pôles. En conséquence, à la surface, la valeur de  $\delta\omega$  est contrôlée par la diffusion visqueuse des fluctuations générées profondément dans la zone convective. Pour pouvoir cependant comparer nos simulations aux observations de la [Figure 4.1](#), il faut prendre en compte l'influence du champ magnétique des tâches magnétiques puisqu'elles évoluent conjointement au cours d'un cycle magnétique. Nos simulations ne prenant pas en compte le processus d'émergence (voir par exemple [Jouve et al., 2010b](#), pour un exemple de modèles dynamo en champ moyen plus sophistiqués prenant en compte le délai d'émergence du champ magnétique vers la surface), il faut donc comparer les observations à la valeur de  $\delta\omega$  à la tachocline. Dans cette zone, on retrouve une forte similitude entre les fluctuations dans nos modèles et les observations. Le diagramme temps latitude [Figure 4.15](#) présente une branche équatoriale et une branche polaire qui débutent chacune en  $\theta_\ell \simeq 45^\circ$ , bien que leur amplitude soit un peu plus faible que les valeurs observées ( $\delta\omega \simeq 1 \text{ nHz}$ ). Notons également que la pente de la branche polaire est moins prononcée que dans les observations. Cette différence peut être due à notre choix du profil de viscosité qui surestime sa valeur à la BCZ. Ces branches sont d'amplitudes comparables grâce à la prise en compte de la diffusivité augmentée due à la supergranulation proche de la surface. Ce résultat est en contraste avec ceux obtenus par [Rempel \(2007\)](#). Dans notre cas, les oscillations torsionnelles ont une nature purement mécanique (due à la force de Lorentz) et ne nécessitent pas de processus thermiques spécifiques.

Dans un second temps, nous avons étudié l'influence du taux de rotation sur nos modèles. En pratique, cela revient à faire varier le nombre dynamo  $D$  et le nombre d'Elsasser toroidal  $\Lambda_t$ . Lorsque  $\Omega_0 < \Omega_\odot$ , le nombre dynamo est en dessous du seuil critique, ce qui mène à une énergie magnétique décroissante dans le temps. Pour des taux de rotation plus élevés, l'effet dynamo et en particulier l'effet  $\Omega$  à la tachocline est plus efficace, générant une énergie magnétique plus élevée. En réponse, l'amplitude de la force de Lorentz augmente également ce qui entraîne une amplitude plus forte de  $\omega$ . Ce dernier croît en réduisant simultanément la rotation différentielle radiale et latitudinale. Enfin, lorsque  $\Omega_0 > 3\Omega_\odot$ , la solution dynamo change significativement : les cycles deviennent plus irréguliers avec une rupture de symétrie entre deux cycles consécutifs, et l'on perd également le doublement de périodicité entre  $B_\phi$  et les variations de  $\omega$ .

En conclusion, la prise en compte de la rétroaction de la force de Lorentz macroscopique permet de rendre plus réalistes les simulations 2D. L'instabilité dynamo est saturée de manière cohérente par les processus non linéaires (la force de Lorentz) et permet de reproduire des caractéristiques supplémentaires du cycle solaire, les oscillations torsionnelles. À terme, l'effet Malkus-Proctor permettra également d'étudier les questions liées à la parité du champ magnétique mais également les modulations à long terme des cycles magnétiques ([Bushby, 2006](#); [Moss et al., 2008](#)).



Troisième partie

## Simulations 3D de la dynamique interne



## Contents

<b>5.1 Motivations pour les simulations numériques 3D des intérieurs stellaires</b>	<b>151</b>
<b>5.2 Approches numériques pour modéliser la zone convective</b>	<b>153</b>
5.2.1 Le défi	153
5.2.2 Approche DNS	154
5.2.3 Approche LES	155
<b>5.3 Description du modèle</b>	<b>156</b>
5.3.1 Équations résolues	156
5.3.2 Etat de référence 1D	158
5.3.3 Paramètres de simulation	161
5.3.4 Vers un état d'équilibre énergétique	163
<b>5.4 Propriétés de la convection</b>	<b>166</b>
<b>5.5 Écoulements à grandes échelles</b>	<b>171</b>
5.5.1 Rotation différentielle	172
5.5.2 Circulation méridienne	174
<b>5.6 Conclusion et perspectives</b>	<b>176</b>

Dans ce chapitre, nous cherchons à modéliser les étoiles de masse 0.5, 0.7, 0.9 et 1.1  $M_{\odot}$  au taux de rotation solaire  $\Omega_{\odot}$ , en résolvant désormais l'ensemble des équations qui régit la dynamique interne, en 3D grâce au code de simulation ASH. Nous pourrons alors étudier en détails les interactions non linéaires entre la thermodynamique, la rotation et la convection. Nous en déduirons comment et pourquoi les propriétés de la convection changent avec la masse de l'étoile, et en conséquence comment changent les écoulements à grande échelle (rotation différentielle et circulation méridienne).

## 5.1 Motivations pour les simulations numériques 3D des intérieurs stellaires

Dans la Partie II, nous avons étudié les propriétés magnétiques des étoiles de type solaire en dynamo champ moyen. Cela signifie que l'on s'est intéressé aux échelles spatiales de l'ordre de la taille de l'étoile sur des temps diffusifs (des milliers d'années) bien plus longs que le temps dynamique (de l'ordre de la semaine). Les bénéfices que l'on peut tirer de ces simulations reposent néanmoins sur la

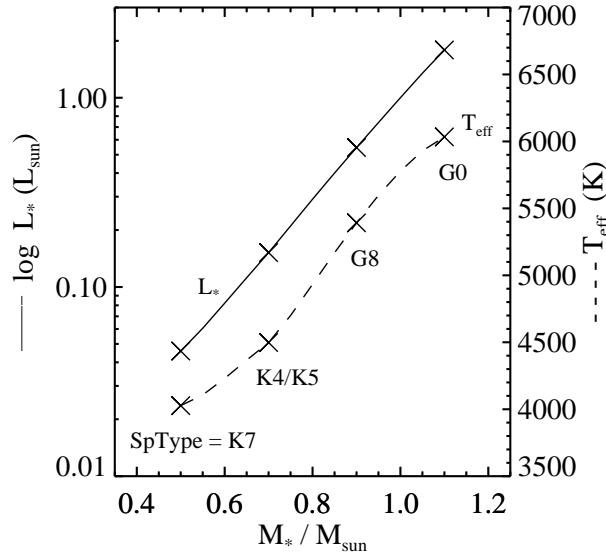


supposition a priori des profils des divers processus physiques mis en jeu. Il devient alors tout aussi important de bien caractériser ces ingrédients physiques grâce aux simulations numériques, surtout lorsque les observations ne sont pas disponibles. Les conditions extrêmes qui prévalent dans les intérieurs stellaires sont en effet hors de portée des expériences de laboratoire. Bien que ces dernières puissent nous aider à comprendre les aspects fondamentaux de la turbulence et de la dynamo (cf Section 2.3.4), la plupart de nos connaissances à propos de la dynamique à grande échelle des étoiles proviennent des expériences numériques. A titre d'exemple, nous sommes désormais capables de simuler une étoile dans sa quasi-intégralité, en utilisant jusqu'à 10k cœurs, avec un niveau de réalisme jamais atteint jusqu'à maintenant (Brun et al., 2011). De plus, comme on l'a vu au Chapitre 1, les étoiles abritent en elles de riches et complexes processus physiques en interaction, et en général, non linéaires. Entre autres, la nature chaotique de la turbulence intense agissant dans la zone convective ( $Re \sim 10^{11}$ ) rend d'autant plus nécessaire l'utilisation des simulations 3D pour rendre compte correctement des aspects tridimensionnels des écoulements. La turbulence (et surtout en MHD) reste d'ailleurs de nos jours l'une des difficultés les plus importantes rencontrées en physique.

En physique stellaire, l'arrivée d'observations de la dynamique a motivé le développement de simulations numériques de leur intérieur. Nous avons désormais accès au champ magnétique de surface grâce à la spectropolarimétrie (e.g. Donati et al., 2003), à la rotation différentielle de surface (e.g. Barnes et al., 2005), ou encore à l'activité magnétique à travers divers traceurs (e.g. Donahue et al., 1996; Oláh et al., 2009) comme décrit dans la Section 1.6.2; et ce, sur une variété d'étoiles suffisante pour commencer à détecter des tendances statistiques significatives (voir par exemple Barnes et al., 2005; Saar, 2009; Wright et al., 2011). La dynamique d'étoiles très similaires au Soleil commencent même à être observées (Petit et al., 2008). Pour comprendre comment les propriétés hydrodynamiques (mais aussi *magnéto*-hydrodynamiques, cf Chapitre 7) dépendent des paramètres stellaires, nous avons mené des simulations 3D de l'intérieur des étoiles. Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés uniquement à la zone convective pour y identifier les variations inhérentes à la différence en masse<sup>1</sup>. Ces simulations devraient nous aider à mieux comprendre la variété des comportements observés, notamment concernant la convection, la circulation méridienne et la rotation différentielle. On s'attend effectivement à ce que la masse ait une incidence majeure sur ces propriétés puisque la luminosité (i.e. la quantité d'énergie générée par unité de temps au cœur des étoiles) en dépend fortement (cf Figure 5.1).

Dans cette partie, nous nous intéressons aux étoiles de type G0 à K9 dont les caractéristiques ont été décrites à la Section 1.3, c'est-à-dire dont la masse varie de  $0.5 M_{\odot}$  à  $1.1 M_{\odot}$ , mettant en exergue l'impact de la variation de luminosité et l'importance de la masse relative contenue dans la couche convective (cf Figure 5.4). Ce travail s'inscrit dans un effort collectif visant à comprendre la dynamique interne des étoiles. Les premières simulations visaient à étudier la zone convective solaire (Miesch et al., 2000; Elliott, 2000; Brun and Toomre, 2002; De Rosa et al., 2002). Mais rapidement, d'autres simulations aux résolutions toujours plus élevées suivirent, pour étudier le Soleil sous de nombreux aspects comme par exemple l'effet dynamo dans la zone convective (Brun et al., 2004), l'effet de la tachocline sur le profil de rotation différentielle (Miesch et al., 2006), ou encore l'organisation du champ magnétique en présence d'une zone stable (Browning et al., 2006). A ce jour, nous sommes désormais en possession de nombreuses simulations couvrant une large gamme d'étoiles. Par exemple, Augustson et al. (2012) modélisent les étoiles de type F comportant une zone convective étroite près de la surface, alors que Browning (2008) s'intéresse aux étoiles de très faible masse (type M) dont la zone convective pénètre profondément dans l'étoile jusqu'en son centre. Les étoiles massives ont également été étudiées, des types A (Browning et al., 2004; Brun et al., 2005; Featherstone et al., 2009) aux types O et B (Augustson et al., 2010). Enfin, les étoiles hors séquence principale ne sont pas délaissées puisque d'intenses efforts sont réalisés pour comprendre les étoiles géantes (Brun and Palacios, 2009;

1. Nous verrons par la suite l'influence de la présence d'une zone radiative sous jacente (Chapitre 6), puis l'influence d'un champ magnétique généré par effet dynamo (cf Chapitre 7).



**FIGURE 5.1** – Luminosité (trait plein) et température effective (tirets) en fonction de la masse dans l'intervalle de masse considérée, déduite du code d'évolution stellaire CESAM (Morel, 1997). Les symboles "x" marquent les 4 étoiles que l'on modélise dans ce chapitre, auprès desquelles est indiqué le type spectral associé (Matt et al., 2011).

Palacios, 2012), ainsi que les étoiles pré-séquences principales (Bessolaz and Brun, 2011).

## 5.2 Approches numériques pour modéliser la zone convective

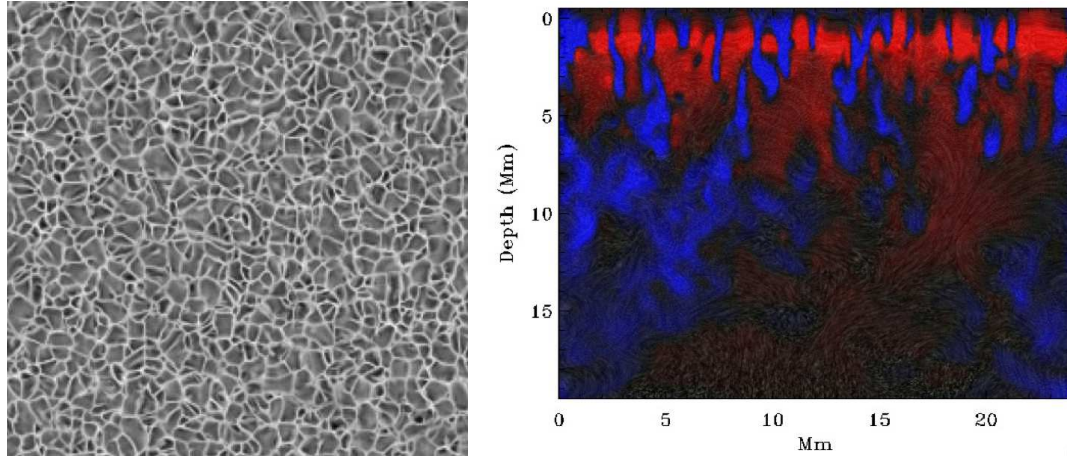
### 5.2.1 Le défi

Dans ce chapitre, nous étudions plus précisément les propriétés hydrodynamiques de la zone convective des étoiles de type solaire. Comme cette région est importante pour la génération de champ magnétique, on se doit de comprendre auparavant ses propriétés hydrodynamiques. La forte turbulence associée à la convection rend très difficile sa modélisation car on doit alors en théorie résoudre toutes les échelles spatiales des plus grandes (de l'ordre du rayon solaire) jusqu'à l'échelle de dissipation visqueuse (de l'ordre du centimètre). Les échelles de dissipation thermiques et magnétiques sont plus grandes, du mètre au kilomètre ( $Pr \sim 10^{-6}$  et  $P_m \sim 10^{-2}$ ), mais restent bien en deçà de la résolution numérique. De plus, les échelles temporelles impliquées varient de manière aussi drastiques que les échelles spatiales. La granulation évolue sur des temps de l'ordre de la minute. Le temps de retournement des cellules géantes est comparable à la période de rotation (un mois environ). Enfin, l'activité magnétique qui est intimement liée à la zone convective varie sur plusieurs dizaines d'années. En pratique, la puissance des ordinateurs actuels disponible rend impossible la modélisation d'une si large gamme d'échelles spatio-temporelles. Ainsi, plusieurs approches numériques complémentaires ont émergé pour étudier les différents aspects de la convection.

### 5.2.2 Approche DNS

La première approche possible est dite Direct Numerical Simulation (DNS) dans laquelle on résout explicitement toutes les équations hydrodynamiques (2.14) sans faire d'hypothèse particulière sur les petites échelles spatiales (cf Section 2.1.1). On peut ainsi étudier de manière plus détaillée la turbulence et son interaction avec le champ magnétique, et ce, dans un régime de turbulence plus élevée. Cependant, cette précision a un coût : on est restreint à modéliser une portion volumique très petite (généralement un cube) devant la taille de l'étoile. On choisit alors des conditions aux limites

périodiques et l'on suppose que la solution est représentative de ce qu'il se passe dans l'étoile dans sa globalité. Ces simulations locales ont permis de mettre en avant le phénomène de granulation pour des écoulements convectifs compressibles et turbulents (cf [Figure 5.2](#)).



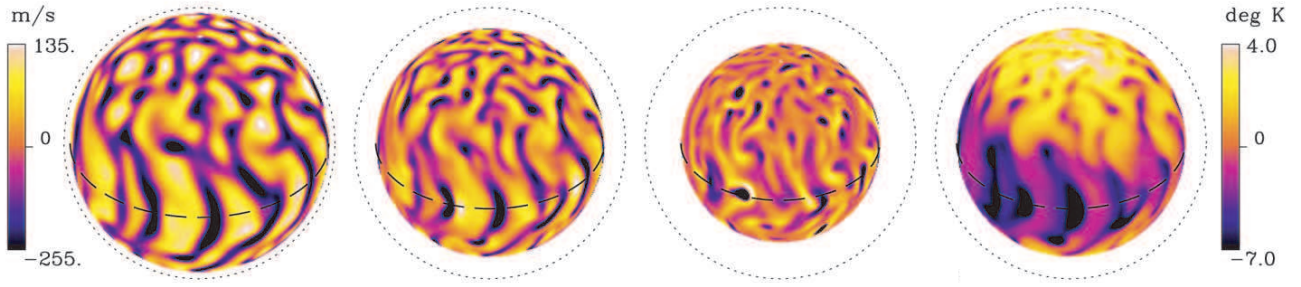
**FIGURE 5.2** – *A gauche* : simulation de la granulation à la surface. *A droite* : Coupe transversale de la vitesse radiale positive en rouge et négative en bleue, mettant en avant la structure hiérarchique de la convection avec de plus larges structures lorsque l'on descend en profondeur. Crédits : [Nordlund et al. \(2009\)](#)

Depuis le travail pionnier de [Nordlund \(1982\)](#), différents auteurs (e.g. [Freytag et al., 2011](#); [Muthsam et al., 2010](#); [Rincon et al., 2005](#); [Vögler et al., 2005](#)) ont modélisé avec divers degrés de sophistication et de simplifications la granulation et la supergranulation (voir review de [Nordlund et al., 2009](#)). En parallèle, d'autres simulations 3D de la magnétoconvection, c'est-à-dire incluant le champ magnétique, se développent pour étudier l'interaction convection/champ magnétique. Cette approche est non seulement utile pour étudier la turbulence, mais est également nécessaire à la détermination des coefficients dynamo (décrits dans la [Section 2.2.4](#)) utilisés comme ingrédients de la dynamo champ moyen (e.g. [Käpylä et al., 2006](#); [Brandenburg et al., 1990](#); [Cattaneo et al., 2003](#)). Ce sont ces modèles qui ont permis de mettre en évidence la structure particulière de la convection turbulente compressible : de larges écoulements ascendants entourés d'un réseau de flots descendants denses et froids, responsables du phénomène de pompage magnétique (cf [Section 3.2](#) et [3.3](#) pour plus de détails).

L'inconvénient majeur est alors que l'on ne peut pas prendre en compte toutes les influences géométriques, les écoulements à grande échelle (rotation différentielle et circulation méridienne) et dans une moindre mesure la stratification, qui peuvent exister et qui sont d'une importance cruciale pour comprendre la dynamique des étoiles.

### 5.2.3 Approche LES

Pour pallier ce défaut majeur des simulations DNS, l'approche Large Eddy Simulation (LES) va plutôt chercher à résoudre l'étoile dans sa globalité en paramétrisant l'influence de la turbulence dont l'échelle caractéristique est inférieure à la résolution, permettant de prendre en compte les effets de la géométrie d'une étoile (sphère stratifiée en rotation). Les premières simulations de ce type ont été développées par [Gilman \(1977, 1978, 1983\)](#), [Gilman and Miller \(1981\)](#) et [Glatzmaier \(1984, 1985a,b\)](#). Dans ces simulations, la convection est dominée par des structures convectives allongées, alignées avec l'axe de rotation, proches de ce que prévoit la théorie linéaire ([Busse, 1970](#)). Ces formes de convection sont connues sous le nom de cellules bananes à cause de leur structure périodique cisailée par la rotation différentielle (cf [Figure 5.3](#)). Ces simulations ont aidé à comprendre l'interaction non linéaire entre la convection, la rotation et le champ magnétique. Elles étaient néanmoins limitées en terme de



**FIGURE 5.3** – Valeur de la vitesse radiale (trois premiers panneaux) et de la fluctuation de température (dernier panneau) à différentes profondeurs traduisant la structure de la convection établie dans le cadre de simulations globales. Crédits : [Brun and Toomre \(2002\)](#). Le cercle en pointillé matérialise la surface de l'étoile.

résolution, restreignant les écoulements à être plutôt laminaires, loin du régime hautement turbulent existant dans les intérieurs stellaires. Afin d'étudier la convection solaire avec un meilleur réalisme grâce à l'avènement des ordinateurs massivement parallèles, [Clune et al. \(1999\)](#), [Brun et al. \(2004\)](#) ont développé le code Anelastic Spherical Harmonic (ASH), fondé sur l'approche LES<sup>2</sup>. Les simulations ASH autorisent une résolution spatiale bien plus élevée que précédemment, permettant d'atteindre des régimes de turbulence plus élevés. C'est ce code qui est utilisé dans toute la Partie III.

Les simulations globales requièrent donc un traitement particulier pour les phénomènes qui se produisent sous la résolution spatiale, c'est ce que l'on appelle traitement sous maille ou *Sub Grid Scale* (SGS). Ce dernier a pour but de modéliser la cascade d'énergie (cf [Figure 2.3](#)) et l'influence de ces phénomènes sous-mailles sur les grandes échelles que l'on étudie. Dans nos modèles, on suppose que leur effet est simplement une viscosité effective (dépendante de l'espace), dite turbulente ou augmentée, très grande devant la viscosité atomique<sup>3</sup>. Cette hypothèse simple est pour le moment l'approche la plus régulièrement utilisée parmi les simulations de la communauté ASH (voir néanmoins [Wong and Lilly, 1994](#)) en l'absence d'une théorie rendant compte de la dynamique complexe d'écoulements stratifiés, magnétisés en rotation. Le choix du traitement SGS peut être amélioré mais doit satisfaire les conditions suivantes : réduire l'influence d'une telle paramétrisation sur les grandes échelles, bien modéliser le processus de cascade turbulente (cf Section 2.1.1) et les processus non résolus et minimiser le nombre de paramètres libres. Des progrès dans ce sens ont été entrepris avec ASH en implémentant un traitement Smagorinsky dynamique ([Nelson et al., 2011, 2013b](#)) pour modéliser le magnétisme des Soleils jeunes. Ces modèles supposent un comportement autosimilaire dans l'intervalle inertiel de la turbulence en extrapolant les effets diffusifs aux échelles non résolues. La viscosité en chaque point du domaine est alors proportionnel au tenseur des déformations  $e_{ij}$ . Nous n'avons cependant pas employé ce traitement dans les simulations présentées dans ce manuscrit.

### 5.3 Description du modèle

Pour modéliser les écoulements turbulents et convectivement instables des enveloppes stellaires, nous utilisons le code ASH. Ce code a été éprouvé et validé par un benchmark ([Jones et al., 2011](#)). Dans cette section, on décrit brièvement la méthode numérique utilisée, mais le lecteur peut se référer à [Clune et al. \(1999\)](#) et [Brun et al. \(2004\)](#) ou à l'annexe C pour plus de détails. Nous cherchons à modéliser dans ce chapitre les étoiles de masse 0.5, 0.7, 0.9 et 1.1  $M_{\odot}$  au taux de rotation solaire  $\Omega_{\odot}$ .

2. Pour plus de détails concernant la méthode numérique du code ASH, voir Appendice C

3. Il en est de même pour les diffusivités thermique et magnétique.

### 5.3.1 Équations résolues

Le code ASH résout les équations de l'hydrodynamique (2.32) sans champ magnétique. Appliquées à notre problème, ces équations deviennent pour l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \quad (5.1)$$

pour l'équation de Navier Stokes (dans laquelle on a négligé la force centrifuge) :

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \nabla P + \nabla \cdot \mathcal{D} - \rho \mathbf{g} + 2\rho(\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}_0) \quad (5.2)$$

où  $\mathcal{D}$  est le tenseur visqueux dont les composantes sont données par :

$$\mathcal{D}_{ij} = 2\rho\nu \left[ e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\delta_{ij} \right] \quad (5.3)$$

pour l'équation d'énergie :

$$\rho T \frac{\partial S}{\partial t} = -\rho T \mathbf{v} \cdot \nabla S - \nabla \cdot (-\kappa \rho T \nabla S - \kappa_r \rho c_p \nabla T) + 2\nu \rho \left[ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] \quad (5.4)$$

où  $e_{ij}$  est le tenseur des déformations (2.7),  $\delta_{ij}$  est le delta de Kronecker,  $\rho$ ,  $T$ ,  $S$  et  $P$  sont la densité, la température, l'entropie spécifique et la pression respectivement,  $c_p$  est la capacité calorifique spécifique à pression constante,  $g$  est l'accélération gravitationnelle,  $\mathbf{v}$  est le vecteur vitesse et  $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{\mathbf{z}}$  la vitesse angulaire du repère. Idéalement,  $\nu$  devrait être la viscosité atomique. Cependant, les simulations globales considérées ici ne peuvent espérer résoudre ces échelles spatiales à cause des limitations de calcul. Cette viscosité doit donc être vue comme *turbulente* car émanant des mouvements de fluides irrésolues (voir traitement SGS dans la Section 5.2.3). Pour la même raison, on définit le flux de chaleur proportionnel au gradient d'entropie et à  $\kappa$ , la diffusivité thermique *turbulente* associée. Le profil de la diffusivité radiative  $\kappa_r$  est déduite d'un modèle 1D (Brun and Toomre, 2002). Toutes les diffusivités  $\kappa_r$ ,  $\nu$ ,  $\kappa$  et  $g$  sont fonction uniquement du rayon et maintenues fixes pendant toute la durée de la simulation.

On choisit d'utiliser l'équation d'état d'un gaz parfait monoatomique :

$$P = \mathcal{R} \rho T \quad (5.5)$$

où  $\mathcal{R}$  est la constante des gaz parfaits et où l'on fixe la capacité calorifique à pression et volume constants tels que

$$c_p = \frac{5}{2} \mathcal{R} \quad (5.6a)$$

$$c_v = \frac{3}{2} \mathcal{R} \quad (5.6b)$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = \frac{5}{3} \quad (5.6c)$$

Chacune des variables thermodynamiques ( $\rho$ ,  $T$ ,  $S$  et  $P$ ) est décomposée comme la somme d'une moyenne sur la sphère, dénotée par une barre horizontale et d'une perturbation, par exemple :

$$\rho(r, \theta, \phi, t) = \bar{\rho}(r, t) + \rho(r, \theta, \phi, t) \quad (5.7)$$

Notons que bien qu'il dépende a priori du temps, le terme  $\bar{\rho}$  varie lentement (sur des temps de l'ordre de  $\tau_{KH}$ ). On définit  $\epsilon$  comme le paramètre d'expansion reflétant l'amplitude de la perturbation.



$$\frac{\rho}{|\bar{\rho}|} \simeq \epsilon \quad (5.8)$$

Ce nombre est proportionnel au carré du nombre de Mach de l'écoulement  $M_a$  (rapport entre la vitesse des écoulements convectifs  $v_{\text{conv}}$  et la vitesse du son locale  $c_s$ ).

$$M_a = \frac{v_{\text{conv}}}{c_s} \quad (5.9)$$

Dans les étoiles, sauf très près de la surface de la zone convective, on a  $\epsilon \leq 10^{-4}$  (Gough and Weiss, 1976). Autrement dit, les mouvements sont subsoniques dans les intérieurs stellaires, i.e.  $M_a \ll 1$ . Ceci justifie l'hypothèse anélastique, c'est-à-dire que l'on suppose la relation (5.10) (Gough, 1969).

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (5.10)$$

Ceci revient à supposer que les ondes sonores ont un effet négligeable sur la dynamique, augmentant considérablement le pas de temps (gain d'un facteur  $M_a^{-1}$ ), puisque c'est maintenant la vitesse des écoulements, beaucoup plus petite que la célérité du son, qui fixe la limite Courant Friedrichs Lewy (CFL) :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{c_s} \Rightarrow \frac{\Delta x}{v_{\text{conv}}} \quad (5.11)$$

où  $\Delta x$  est l'intervalle spatial de la grille numérique et  $\Delta t$  le pas de temps. En introduisant la décomposition (5.7) pour chaque variable thermodynamique et en linéarisant les équations (5.2) et (5.4), et en prenant en compte l'hypothèse anélastique (5.10), on obtient :

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}] + \nabla \cdot \bar{\mathcal{D}} - 2\bar{\rho} \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} \quad (5.12a)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{T} \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S) &= \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) + \bar{\rho} \bar{T} (\kappa \nabla S + \kappa_0 \nabla \bar{S})] \\ &+ 2\bar{\rho} \nu \left[ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] + \bar{\rho} \epsilon \end{aligned} \quad (5.12b)$$

où le tenseur visqueux anélastique est simplement :

$$\bar{\mathcal{D}}_{ij} = 2\bar{\rho} \nu \left[ e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \right] \quad (5.13)$$

On introduit le terme de diffusion thermique  $\kappa_0$  qui agit au bord externe de la zone convective modélisée, là où la convection disparaît à cause des conditions limites (cf Section 5.3.4) pour assurer le transport de l'énergie à travers le bord externe (cf équation (5.21d)). Le terme entre crochets de l'équation (5.12),  $[\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}]$ , est initialement nul car l'état initial déduit d'un modèle 1D calculé avec CESAM, est à l'équilibre hydrostatique. Cependant, lorsque la convection est établie, ce terme n'est plus nul à cause de l'influence de la pression turbulente. Pour les 4 étoiles considérées dans ce chapitre, la luminosité totale atteint plus de 99.9% dans l'ensemble de notre domaine de résolution. On considère donc pour le moment que le terme générateur d'énergie  $\bar{\rho} \epsilon$  dû aux réactions nucléaires est nul<sup>4</sup>. L'équation d'état, une fois linéarisée, donne :

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma \bar{P}} - \frac{S}{c_p} \quad (5.14)$$

et l'ordre zéro de cette équation s'écrit :

4. Nous devons par contre prendre en compte ce terme dans le Chapitre 6

$$\bar{P} = \mathcal{R}\bar{\rho}\bar{T} \quad (5.15)$$

Le code ASH résout l'ensemble des équations (5.10) et (5.12) en 3D par une approche pseudo-spectrale semi-implicite (cf Annexe C). Ces équations sont non linéaires et les variables thermodynamiques sont linéarisées autour d'un état de référence  $(\bar{\rho}, \bar{P}, \bar{T}, \bar{S})$ . Ce dernier est autorisé à s'ajuster sur des temps plus longs au cours de la simulation en extrayant la composante moyenne  $\ell = 0$  apparaissant dans les fluctuations.

### 5.3.2 Etat de référence 1D

#### Propriétés globales

Les simulations 3D s'appuient sur un état de référence initial issue d'un code d'évolution stellaire 1D, CESAM (Morel, 1997) qui utilise les opacités du code OPAL (Iglesias and Rogers, 1996). Autrement dit, on peut définir toutes les quantités moyennées sur la sphère de chaque variable pour l'état initial. Grâce à CESAM, on fait évoluer 4 étoiles, de masses 0.5, 0.7, 0.9 et 1.1  $M_{\odot}$  jusqu'à l'âge du Soleil, i.e. 4.6 Gyr (âge auquel les simulations avec ASH sont réalisées), ce qui nous permet de rendre notre étude comparable aux nombreux cas solaires déjà réalisés. On suppose également que la métallicité est fixée par  $(X, Y, Z) \simeq (0.71, 0.27, 0.02)$  et on choisit un paramètre de longueur de mélange de 1.77, pour être calibré sur le cas solaire. Les caractéristiques de la structure globale de chaque étoile sont listées dans la Table 5.1.

**TABLE 5.1** – Propriétés globales des 4 étoiles considérées, déduites de CESAM à un âge de 4.6 Gyr. De la gauche vers la droite, on donne la masse  $M_*$ , le rayon  $R_*$ , la luminosité  $L_*$  et le type spectral *Type Sp* de l'étoile considérée. Puis, on donne la masse contenue dans la zone convective  $M_{cz}$ , en unité de masse solaire  $M_{\odot}$  et stellaire  $M_*$ ; et le rayon où se trouve la base de la zone convective  $R_{BCZ}$  en unité de rayon solaire  $R_{\odot}$  et stellaire  $R_*$ . Enfin, on donne la température et la densité à la base de la zone convective ( $T(R_{BCZ})$  et  $\rho(R_{BCZ})$ ), puis au centre de l'étoile ( $T_c$  et  $\rho_c$ ). On adopte pour toute la suite de ce manuscrit les conventions suivantes :  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33} \text{g}$ ,  $R_{\odot} = 6.9599 \times 10^{10} \text{cm}$ , and  $L_{\odot} = 3.846 \times 10^{33} \text{erg s}^{-1}$ .

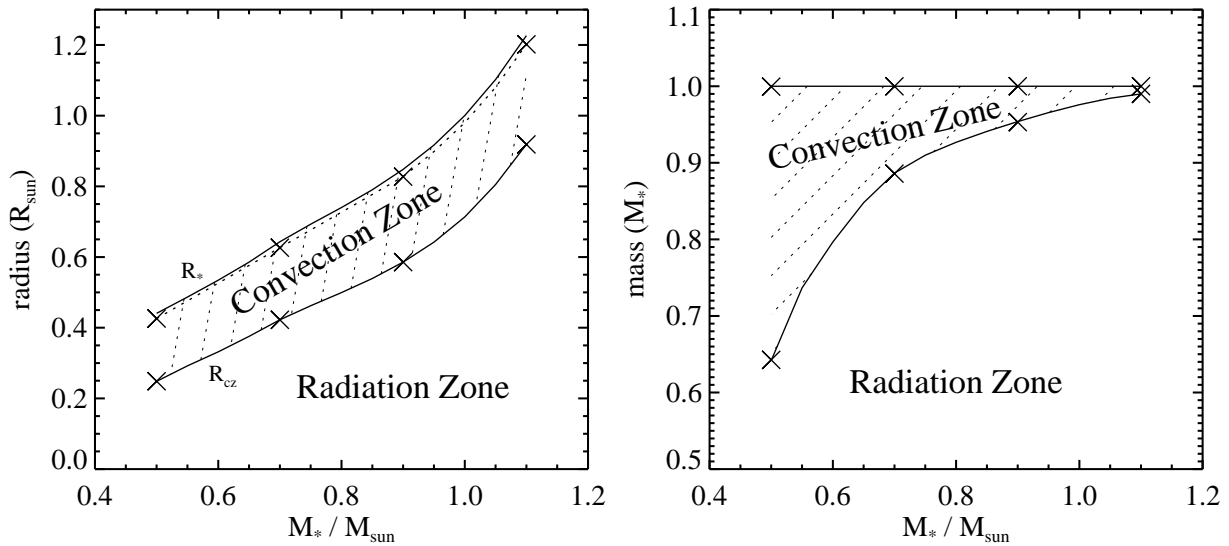
Masse ( $M_{\odot}$ )	Rayon ( $R_{\odot}$ )	$L_*$ ( $L_{\odot}$ )	$T_{\text{eff}}$ (K)	Type Sp.	$M_{cz}$ ( $M_{\odot}, M_*$ )	$R_{BCZ}$ ( $R_{\odot}, R_*$ )	$T(R_{BCZ})$ (K)	$\rho(R_{BCZ})$ ( $\text{g.cm}^{-3}$ )	$T_c$ (K)	$\rho_c$ ( $\text{g.cm}^{-3}$ )
0.5	0.44	0.046	4030	K7	0.18, 0.36	0.25, 0.56	$4.3 \times 10^6$	14	$8.9 \times 10^6$	76.7
0.7	0.64	0.15	4500	K4/K5	0.079, 0.11	0.42, 0.66	$3.0 \times 10^6$	2.1	$1.1 \times 10^7$	88.0
0.9	0.85	0.55	5390	G8	0.042, 0.046	0.59, 0.69	$2.6 \times 10^6$	0.51	$1.4 \times 10^7$	119
1.1	1.23	1.79	6030	G0	0.011, 0.010	0.92, 0.75	$1.6 \times 10^6$	0.048	$1.9 \times 10^7$	240

On représente graphiquement ces caractéristiques dans la Figure 5.1 et la Figure 5.4 dans lesquelles les symboles "x" marquent les 4 étoiles que l'on modélise dans ce chapitre. Dans la Figure 5.1, on montre la luminosité totale (trait plein) ainsi que la température effective (tirets) en fonction de la masse dans l'intervalle qui nous intéresse. Cette Figure met en avant l'accroissement rapide de la luminosité en fonction de la masse, comme ce qui est attendu pour les étoiles de la séquence principale (ici, on a approximativement  $L_* \propto M^{4.6}$ ). A titre indicatif, l'étoile à 1.1  $M_{\odot}$  est 40 fois plus lumineuse que l'étoile à 0.5  $M_{\odot}$ .

Dans la Figure 5.4, on montre le rayon photosphérique  $R_*$  (trait plein supérieur) ainsi que l'emplacement de la base de la zone convective (trait plein inférieur) en fonction de la masse. De même que pour la luminosité, le rayon de l'étoile dépend fortement de la masse avec  $R_*(1.1 M_{\odot}) \simeq 2.8 R_*(0.5 M_{\odot})$ , ce



qui donne approximativement  $R_* \propto M^{1.3}$ <sup>5</sup>. L'extension spatiale de la zone convective est représentée par la région comprise entre les deux traits pleins, alors que la région sous jacente représente la zone radiative stable au regard de la convection. On remarque que la taille absolue de la zone convective augmente légèrement avec la masse. Cependant, la taille relative de la CZ sur la RZ diminue, passant de 44% à 25% du rayon stellaire pour une masse de 0.5 à 1.1  $M_\odot$  (pour le Soleil, cette valeur est approximativement de 30%). Dans le second panneau de la **Figure 5.4**, on montre encore une fois l'extension de la zone convective, mais cette fois exprimée en masse et normalisée à la masse de l'étoile. Les traits pleins représentent la localisation de la surface et de la base de la zone convective. La surface enlacée et hachurée en pointillés traduit donc l'importance en masse de la CZ. Cette vue permet de mettre en avant que la masse (relative à la masse totale) contenue dans la CZ décroît fortement avec la masse de l'étoile, bien que sa taille relative reste presque constante (comme le montrait le panneau de gauche). Les étoiles de masse plus faible que celles considérées ici seront quasi-totalement convectives alors que les étoiles plus massives n'auront qu'une enveloppe convective très superficielle. La masse relative contenue dans la CZ varie de 36% à 1% dans notre intervalle de masse étudiée.



**FIGURE 5.4** – *A gauche* : Rayon de l'étoile (trait supérieur) et localisation de la base de la zone convective (trait inférieur) en fonction de la masse de l'étoile. *A droite* : Masse contenue entre la surface (trait supérieur) et la base de la zone convective (trait inférieur) en fonction de la masse de l'étoile. Dans les deux panneaux, l'importance de la CZ est traduite par la surface hachurée en pointillés et les symboles "x" marquent les 4 étoiles que l'on modélise dans ce chapitre.

Enfin, les deux dernières colonnes de la **Table 5.1** donnent la température et la densité de masse au centre de l'étoile. Bien que leurs valeurs au centre de l'étoile (en  $r = 0$ ) croissent avec la masse, elles sont en fait moins élevées à la BCZ (8<sup>ème</sup> et 9<sup>ème</sup> colonne de la même table). En d'autres termes, lorsque la masse de l'étoile croît, la zone convective devient plus froide et ténue.

### Profils des variables

En plus des valeurs qui définissent la structure des étoiles, CESAM nous fournit les profils radiaux de gravité et du gradient d'entropie. En utilisant l'équation de l'équilibre hydrostatique (5.16)

5. Les relations Masse-Luminosité et Masse-Rayon étant issues d'une simulation 1D, elles souffrent d'une modélisation grossière des processus physiques dynamiques comme la convection, ce qui peut résulter en des exposants légèrement différents des exposants empiriques donnés dans les équations (1.2)

$$\frac{d\bar{P}}{dr} = -\bar{\rho}g \quad (5.16)$$

on peut se ramener à un ensemble de deux équations que l'on résoud par une méthode itérative de Newton-Raphson.

$$\frac{d\bar{\rho}}{dr} + \frac{g}{\gamma} \bar{\rho}^{2-\gamma} e^{-\gamma \frac{\bar{S}}{C_p}} + \frac{\bar{\rho}}{C_p} \frac{d\bar{S}}{dr} = 0 \quad (5.17a)$$

$$\bar{P} = e^{\gamma \frac{\bar{S}}{C_p}} \bar{\rho}^\gamma \quad (5.17b)$$

Le profil de température est ensuite déduite de l'équation des gaz parfaits (5.15). On représente les profils des variables thermodynamiques ( $\bar{\rho}$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{P}$ ) et l'échelle de hauteur  $H_\rho$  définie par l'équation (5.18), à l'état initial dans la Figure 5.5.  $H_\rho$  représente la distance au bout de laquelle la densité a diminué d'un facteur  $e$ .

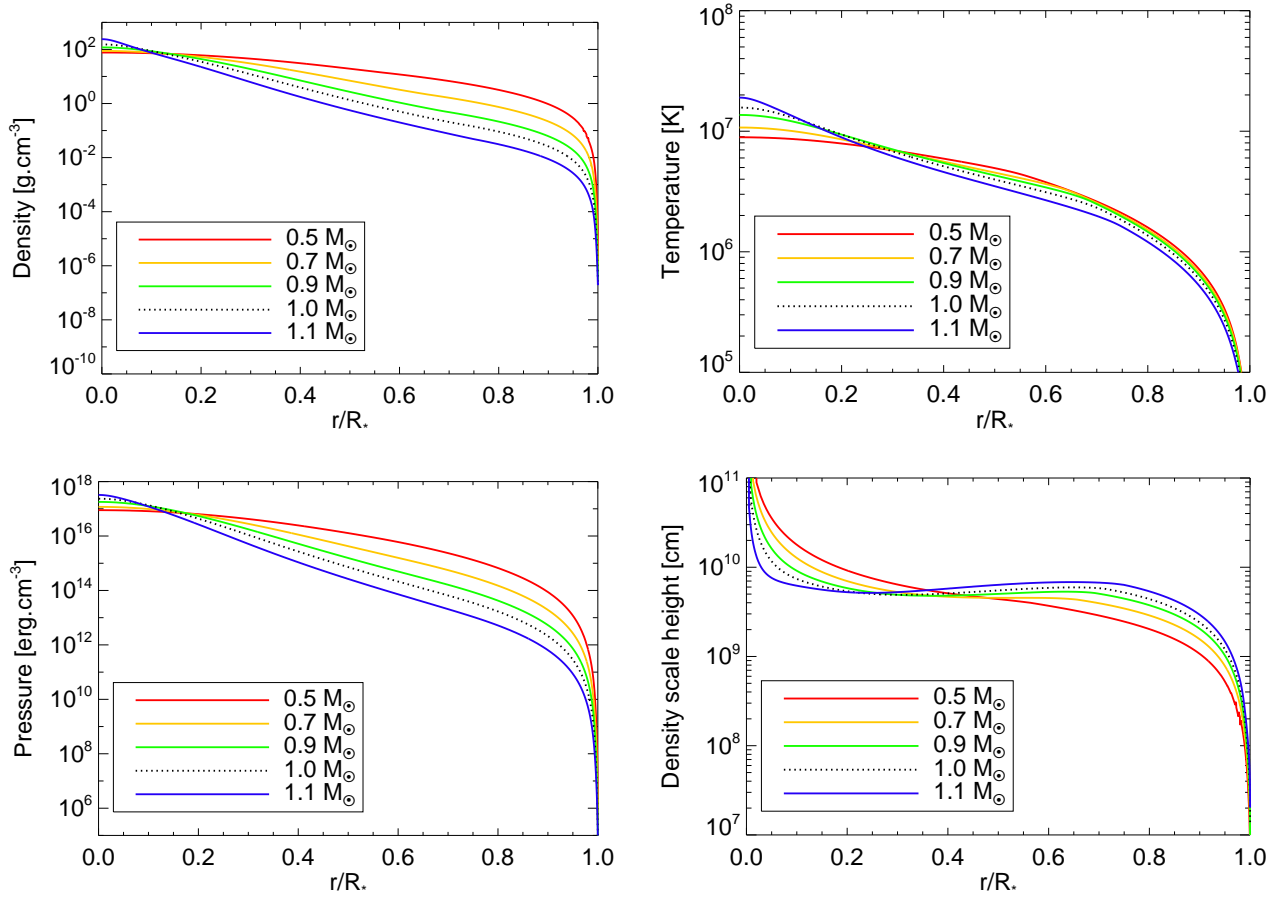
$$H_\rho = - \left[ \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \right]^{-1} \quad (5.18)$$

Le rayon a été normalisé au rayon stellaire  $R_*$  de telle sorte qu'on peut comparer directement la zone convective des différentes étoiles. On a représenté en pointillés le cas solaire à titre comparatif (cf Figure 5.5). Toutes les quantités thermodynamiques montrent une décroissance monotone en fonction du rayon avec une accélération de cette décroissance proche de la photosphère (i.e. à partir d'environ  $0.9R_*$ ); et ce, pour toutes les masses considérées. Lorsque la masse augmente, on note cependant que toutes ces quantités (et en particulier la température et la densité) diminuent, ce qui va affecter les propriétés convectives (cf Section 5.4). L'échelle de hauteur a une variation plus complexe mais chute brutalement lorsque l'on s'approche de la surface, ce qui implique la présence d'une enveloppe convective très stratifiée.

### 5.3.3 Paramètres de simulation

Le domaine de résolution est restreint à la zone convective seule. Le bord interne coïncide avec la BCZ,  $R_{cz}$ , pour chacune des étoiles. Le bord externe est choisi de telle sorte que la densité soit 100 fois plus faible qu'à la BCZ, ce qui est légèrement en dessous de la photosphère. L'emplacement du bord externe est noté  $R_{top}$  dans la Table 5.2. Cela nous évite d'avoir à résoudre cette zone là où la convection a une structure très fine très difficile à résoudre avec une approche globale.

Dans chacun des 4 cas, le profil de gravité ( $\mathbf{g}$ ) est celui fourni par le code CESAM, et le gradient d'entropie ( $\frac{\partial \bar{S}}{\partial r}$ ) est initialisé avec une constante égale à la valeur du gradient d'entropie (superadiabatique) au milieu de la zone convective fournie par CESAM. L'état de référence des variables thermodynamiques ( $\bar{\rho}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}$  et  $\bar{S}$ ) est alors choisi de telle sorte que le système soit en équilibre hydrostatique. Le gradient d'entropie ainsi que les diffusivités sont choisies de telle sorte que le système soit convectivement instable, c'est-à-dire que le nombre de Rayleigh soit supérieur au nombre de Rayleigh critique. Le champ de vitesse initial  $\mathbf{v}$  et la fluctuation  $S$  sont initialisés avec une perturbation aléatoire, d'énergie cinétique négligeable, afin de permettre le déclenchement des mouvements convectifs. La valeur choisie pour les diffusivités assure que la turbulence représentée par le nombre de Reynolds ( $R_e$ ) soit la plus élevée possible pour une résolution fixée. Comme montré dans la Section 5.4, une plus grande luminosité  $L_*$  engendre une vitesse convective plus élevée. Il est donc nécessaire d'augmenter la viscosité afin de garder un nombre de Reynolds comparable (environ d'un facteur 2, cf Table 5.3) entre les modèles, ce qui explique la tendance apparente de  $\nu_{top}$  dans la Table 5.2. Conserver un nombre de Reynolds similaire permet de comparer la variation des propriétés convectives dues à la masse et/ou à la rotation



**FIGURE 5.5** – Profils des variables thermodynamiques, de l’échelle de hauteur et densité initiales pour chaque étoile simulée dans ce chapitre (en trait plein du bleu vers le rouge) et pour le Soleil (pointillés), en fonction du rayon normalisé au rayon stellaire  $R_*$ .

**TABLE 5.2** – Paramètres des simulations pour chaque étoile. La résolution radiale, latitudinale et longitudinale est notée  $N_r$ ,  $N_\theta$  et  $N_\phi$ . Le bord externe de notre domaine de simulation est  $R_{\text{top}}$ , et  $H_\rho(R_{\text{top}})$  est l’échelle de hauteur à cet emplacement. L’extension radiale de notre simulation est  $L = R_{\text{top}} - R_{\text{BCZ}}$ . La viscosité au bord externe en  $R_{\text{top}}$  est  $\nu_{\text{top}}$  et est proportionnelle à l’inverse de la racine carrée de la densité  $\bar{\rho}$ . Toutes les étoiles ont un nombre de Prandtl  $P_r \equiv \nu/\kappa = 0.25$  constant dans tout le domaine et ont un taux de rotation solaire,  $\Omega_\odot = 2.6 \times 10^{-6}$  rad/s, correspondant à une période de  $2\pi/\Omega_\odot \simeq 28$  jours. On donne également le nombre de Rayleigh  $R_a \equiv (-\partial\rho/\partial S)\Delta S g L^3/(\rho\nu\kappa)$ , le nombre de Taylor  $T_a \equiv 4\Omega_0^2 L^4/\nu^2$ , et le nombre de Rossby convectif  $R_{oc} \equiv (R_a/T_a P_r)^{1/2}$ , tous évalués au milieu de la zone convective.

Masse ( $M_\odot$ )	$N_r, N_\theta, N_\phi$	$R_{\text{top}}$ ( $R_\odot, R_*$ )	$H_\rho(R_{\text{top}})$ (Mm)	$L$ (Mm)	$\nu_{\text{top}}$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$R_a$	$T_a$	$R_{oc}$
0.5	257, 256, 512	0.43, 0.97	6.1	120	$3.5 \times 10^{11}$	$3.9 \times 10^6$	$1.5 \times 10^8$	0.32
0.7	257, 256, 512	0.63, 0.97	6.3	140	$2.0 \times 10^{12}$	$6.0 \times 10^5$	$8.1 \times 10^6$	0.54
0.9	257, 256, 512	0.83, 0.98	7.6	170	$5.0 \times 10^{12}$	$1.9 \times 10^5$	$2.6 \times 10^6$	0.54
1.1	257, 256, 512	1.20, 0.98	8.6	200	$2.0 \times 10^{13}$	$3.6 \times 10^4$	$3.2 \times 10^5$	0.67

seulement, car par exemple la taille des cellules diminue avec  $R_e$  due aux propriétés de la turbulence (cf Section 2.1.1). Pour chaque masse, la viscosité et la diffusivité thermique (puisque l’on a choisi de

maintenir le nombre de Prandtl  $Pr = 0.25$  constant) ne dépendent que du rayon, comme l'inverse de la racine carrée de la densité. Le choix d'un tel profil (utilisé dans la plupart des simulations ASH sus-citées) permet à la turbulence d'être significative et semblable pour tous les rayons. Nous avons choisi cette valeur de  $P_r$  car cela nous permet de comparer directement nos simulations avec les travaux précédemment publiés, mais aussi pour limiter le coût numérique. En effet, on ne peut pour l'instant, avec les moyens actuels, atteindre la valeur très faible de  $P_r$  dans les zones convectives stellaires, soit  $P_r \sim 10^{-6}$ .

Outre le nombre de Prandtl, on donne dans la [Table 5.2](#) le nombre de Rayleigh (calculé à partir de l'entropie à l'état stationnaire de nos simulations), le nombre de Taylor et le nombre de Rossby convectif. Contrairement aux simulations menées dans le [Chapitre 6](#), on ne cherche pas particulièrement à conserver le rapport  $R_a/R_{a,c}$  constant mais plutôt à optimiser le degré de turbulence de chaque modèle en maintenant un nombre de Reynolds aussi élevé que permet la résolution. Les nombres de Rayleigh et Taylor montrent une forte décroissance avec la masse de l'étoile, ce qui est expliqué principalement par la valeur croissante de la diffusivité ( $\nu_{\text{top}}$ ). Si cette dernière avait été constante, ces nombres auraient été croissants avec la masse. Rappelons que  $\nu_{\text{top}}$  augmente avec la masse pour maintenir un nombre de Reynolds constant, qui ne peut dépasser une valeur critique pour une résolution donnée. Le nombre de Rossby convectif, lui, augmente avec la masse de l'étoile, ce qui signifie qu'au même taux de rotation, la force de Coriolis a de moins en moins d'influence sur la dynamique. Ceci devrait induire des différences dans la dynamique des différents modèles.

Pour les bords interne et externe, les conditions aux limites sont des murs impénétrables (i.e. la vitesse radiale est nulle) et sans couple pour les vitesses horizontales. On y impose que le gradient d'entropie soit fixé à la valeur initiale.

$$v_r = 0 \quad (5.19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\theta}{r} \right) = 0 \quad (5.19b)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\phi}{r} \right) = 0 \quad (5.19c)$$

$$\frac{\partial S}{\partial r} = 0 \quad (5.19d)$$

### 5.3.4 Vers un état d'équilibre énergétique

Le transport de l'énergie est assuré par différents processus physiques. Chacun de ces processus contribue au flux d'énergie total à travers la coquille sphérique. Le modèle est alors à l'équilibre lorsque la somme de la contribution de chaque processus physique (cf équation (5.20)) est égale à la luminosité stellaire  $L_*(r)$  à chaque rayon :

$$F_e + F_k + F_r + F_u + F_\nu = \frac{L_*(r)}{4\pi r^2} \quad (5.20)$$

où  $F_e$  est le flux d'enthalpie représentant le transport par convection,  $F_k$  le flux d'énergie cinétique et  $F_\nu$  le flux visqueux. Le transport radiatif est déterminé par le coefficient de diffusivité radiatif  $\kappa_r$  dont le profil est choisi de telle sorte que le flux radiatif  $F_r$  est le même que celui fourni par le code CESAM partout dans le domaine. Les conditions limites et la structure initiale de l'étoile sont choisis pour que le flux d'énergie à la base du domaine (assuré intégralement par  $F_r$ ) soit constant dans le temps. Au bord externe du domaine,  $H_\rho$ , qui détermine en partie la taille des cellules convectives, devient extrêmement petite. Il devient alors très difficile d'y résoudre numériquement la convection dans notre approche globale. De plus, la condition limite de mur impénétrable empêche tout flux d'enthalpie (i.e. la convection) de transporter l'énergie vers l'extérieur et tous les autres processus physiques ont à cet endroit une contribution négligeable. Afin d'assurer le transport de l'énergie à travers la couche limite

supérieure impénétrable, on introduit donc un transport diffusif additionnel (le terme proportionnel à  $\kappa_0$  dans l'équation (5.12)). Ce terme modélise le flux d'enthalpie créé par la convection (que l'on suppose à symétrie sphérique) très petite proche de la surface du domaine que l'on appellera *flux turbulent irrésolu*  $F_u$  dans toute la suite (cf discussion sur le traitement SGS dans la Section 5.2.3). Dans chaque cas, le profil de  $\kappa_0$  est choisi de telle sorte que le flux turbulent irrésolu ait une contribution négligeable au sein de la zone convective, mais qui s'accroisse progressivement jusqu'à transporter la totalité de l'énergie à la surface (cf Figure 5.6). Ce flux est maintenu constant dans le temps. Chaque flux est calculé par les équations suivantes :

$$F_e = \bar{\rho} c_p \overline{v_r T} \quad (5.21a)$$

$$F_k = \frac{1}{2} \overline{\rho v^2 v_r} \quad (5.21b)$$

$$F_r = -\kappa_r \bar{\rho} c_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial r} \quad (5.21c)$$

$$F_u = -\kappa_0 \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial \bar{S}}{\partial r} \quad (5.21d)$$

$$F_\nu = -\overline{\mathbf{v} \cdot \mathcal{D}}|_r \quad (5.21e)$$

Chaque flux  $F_i$  est alors exprimé en terme de luminosité  $L_i$  par l'équation (5.22).

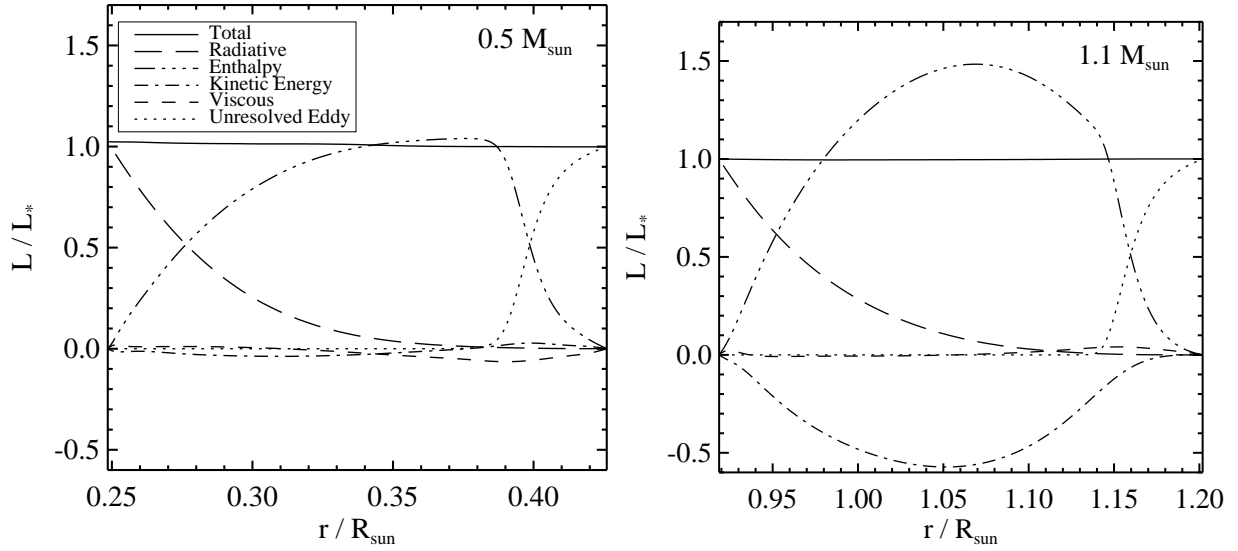
$$L_i(r) = 4\pi r^2 F_i(r) \quad (5.22)$$

Au début de la simulation, l'étoile est dans un état quiescent. Le flux d'enthalpie est nul à cause de l'absence de convection. Le système n'est pas en équilibre énergétique dans la direction radiale. Dans cette situation, le gradient d'entropie va évoluer vers un état d'équilibre d'énergie. De plus, comme le fluide est superadiabatique ( $\frac{\partial \bar{S}}{\partial r} < 0$ ) dans l'ensemble de notre domaine (la zone convective), avec un nombre de Rayleigh supérieur au nombre de Rayleigh critique, conditions adéquates pour que la convection se déclenche, des mouvements convectifs s'établissent rapidement pour transporter l'énergie vers la surface. Une fois la convection déclenchée, un équilibre de flux d'énergie est atteint en quelques temps de retournement convectifs (de l'ordre du mois), et est maintenu pendant toute la durée de la simulation. Une fois dans cet état d'équilibre, le transport net d'énergie à travers tout le domaine est constant et égal à la luminosité stellaire  $L_*$ , satisfaisant l'équation (5.20) lorsque l'on moyenne la somme de tous les processus (5.21) sur quelques temps de retournement convectif.

La Figure 5.6 montre la contribution (moyennée dans le temps) de ces différents processus à l'équilibre énergétique en fonction du rayon, pour la moins et la plus massive des étoiles simulées, après une évolution de plusieurs années. Les conditions limites assurent un flux entrant radiatif fixe au bord interne du domaine, et un flux turbulent irrésolu sortant également fixe au bord externe. La luminosité associée à chacun de ces processus est, aux bords, égale à la luminosité stellaire  $L_*$ . À l'intérieur du domaine, le flux radiatif est non nul mais décroît progressivement au sein de la CZ. Le flux d'enthalpie, dû aux mouvements convectifs aux grandes échelles, est le principal processus transportant l'énergie au cœur de la zone convective. Ceci est dû au nombre de Nusslet<sup>6</sup> élevé dans nos modèles, contrairement à beaucoup de modèles publiés en géophysique principalement dominés par la diffusion (Christensen and Aubert, 2006). L'asymétrie entre les plumes ascendantes, chaudes et lentes, et les plumes descendantes froides et rapides<sup>7</sup>, provoque un flux net d'énergie cinétique dirigé vers le centre de l'étoile (e.g. le panneau de droite de la Figure 5.6; Cattaneo et al., 1991; Hurlburt et al., 1986). Afin de compenser ce flux d'énergie négatif, la luminosité  $L_e$  associée au flux d'enthalpie est supérieure à  $L_*$ ,

6. Ce nombre représente le rapport entre le flux de chaleur total porté par tous les processus physiques (dont la convection) et celui porté la diffusion thermique (cf Table A.2).

7. Pour une description plus détaillée, cf Section 5.4.



**FIGURE 5.6** – Dépendance radiale de chaque processus  $L_i$  (moyenné sur la sphère et dans le temps) à l’équilibre énergétique dans notre domaine de résolution. Les luminosités représentées sont celles pour l’étoile à  $0.5$  (à gauche) et  $1.1 M_\odot$  (à droite) lorsque ces dernières ont atteint un état stationnaire.

et permet ainsi de maintenir une luminosité totale  $L(r)$  égale à la luminosité stellaire  $L_*$ . Cet excès s’accroît avec la masse de l’étoile comme on peut le voir sur les deux cas extrêmes montrés dans la [Figure 5.6](#). On ne peut cependant pas conclure fermement si cet effet est uniquement dû aux propriétés intrinsèques de l’étoile (comme la luminosité) ou s’il peut dépendre, par exemple de la viscosité dont la valeur est systématiquement différente entre nos modèles (cf [Table 5.2](#)). Il est néanmoins clair que la vitesse élevée des écoulements convectifs dans les étoiles les plus massives provoque un flux d’énergie cinétique d’amplitude plus marquée, à cause de la différence croissante entre les courants ascendants et descendants.

Bien que l’équilibre des flux soit établi relativement rapidement dans la zone convective, les propriétés statistiques de la turbulence peuvent prendre davantage de temps pour se stabiliser, puisqu’elles sont influencées par le tenseur de Reynolds et par les processus dissipatifs, par exemple. Le tenseur de Reynolds joue par ailleurs un rôle majeur dans l’établissement d’écoulements globaux axismétriques tels que la rotation différentielle et la circulation méridienne dont la vitesse est plus faible que celle de la convection. Ces écoulements globaux évoluent sur des temps caractéristiques environ 10 fois supérieurs au temps de retournement convectif. Afin de s’assurer que nos simulations aient atteint un état stationnaire pour l’ensemble de ces écoulements globaux, nous les avons fait évoluer sur des temps comparables à l’échelle de temps dissipative  $\tau_\nu \sim L^2/\nu_{\text{top}}$ . Le temps total de simulation  $t_f$  pour chaque masse est listé dans la [Table 5.3](#). On montre, comme cas représentatif, dans la [Figure 5.7](#) l’évolution dans le temps (depuis le début de la simulation) des différentes composantes de l’énergie cinétique totale, intégrées sur tout le volume de la simulation, de l’étoile à  $0.5 M_\odot$  : KE (énergie cinétique), DRKE (énergie cinétique de la rotation différentielle), MCKE (énergie cinétique de la circulation méridienne) et CKE (énergie cinétique de la convection).

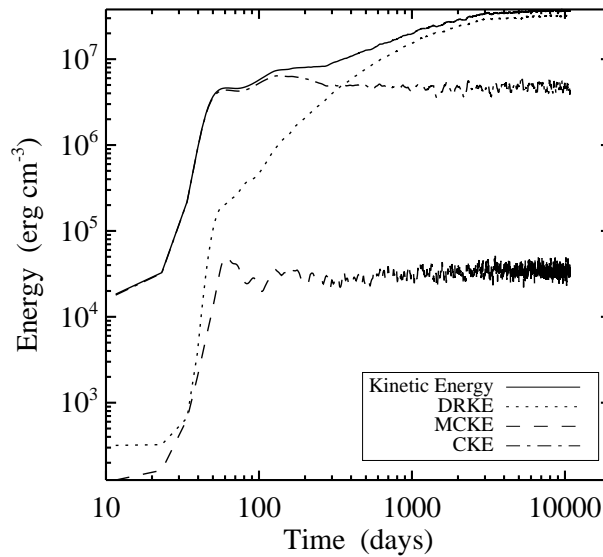
$$\text{KE} = \frac{1}{2} \rho_{\text{tot}} (v_r^2 + v_\theta^2 + v_\phi^2) \quad (5.23a)$$

$$\text{DRKE} = \frac{1}{2} \rho_{\text{tot}} \langle v_\phi \rangle_\phi^2 \quad (5.23b)$$

$$\text{MCKE} = \frac{1}{2} \rho_{\text{tot}} \left( \langle v_r \rangle_\phi^2 + \langle v_\theta \rangle_\phi^2 \right) \quad (5.23c)$$

$$\text{CKE} = \frac{1}{2} \rho_{\text{tot}} \left[ \left( v_r - \langle v_r \rangle_\phi \right)^2 + \left( v_\theta - \langle v_\theta \rangle_\phi \right)^2 + \left( v_\phi - \langle v_\phi \rangle_\phi \right)^2 \right] \quad (5.23d)$$

où  $\langle \rangle_\phi$  désigne la moyenne sur la longitude. L'évolution, pendant la première année, est caractérisée par la croissance exponentielle de l'instabilité linéaire convective, suivie d'une phase de saturation non linéaire avant d'osciller pour se stabiliser vers un état statistiquement stationnaire. L'évolution à long terme est marquée par la croissance lente de l'énergie cinétique associée à la rotation différentielle qui finit par atteindre également l'état stationnaire à la fin de la simulation, les 5000 derniers jours ne montrant aucune évolution significative du système. Tous les résultats présentés dans les sections suivantes sont extraits de cette phase statistiquement stationnaire.



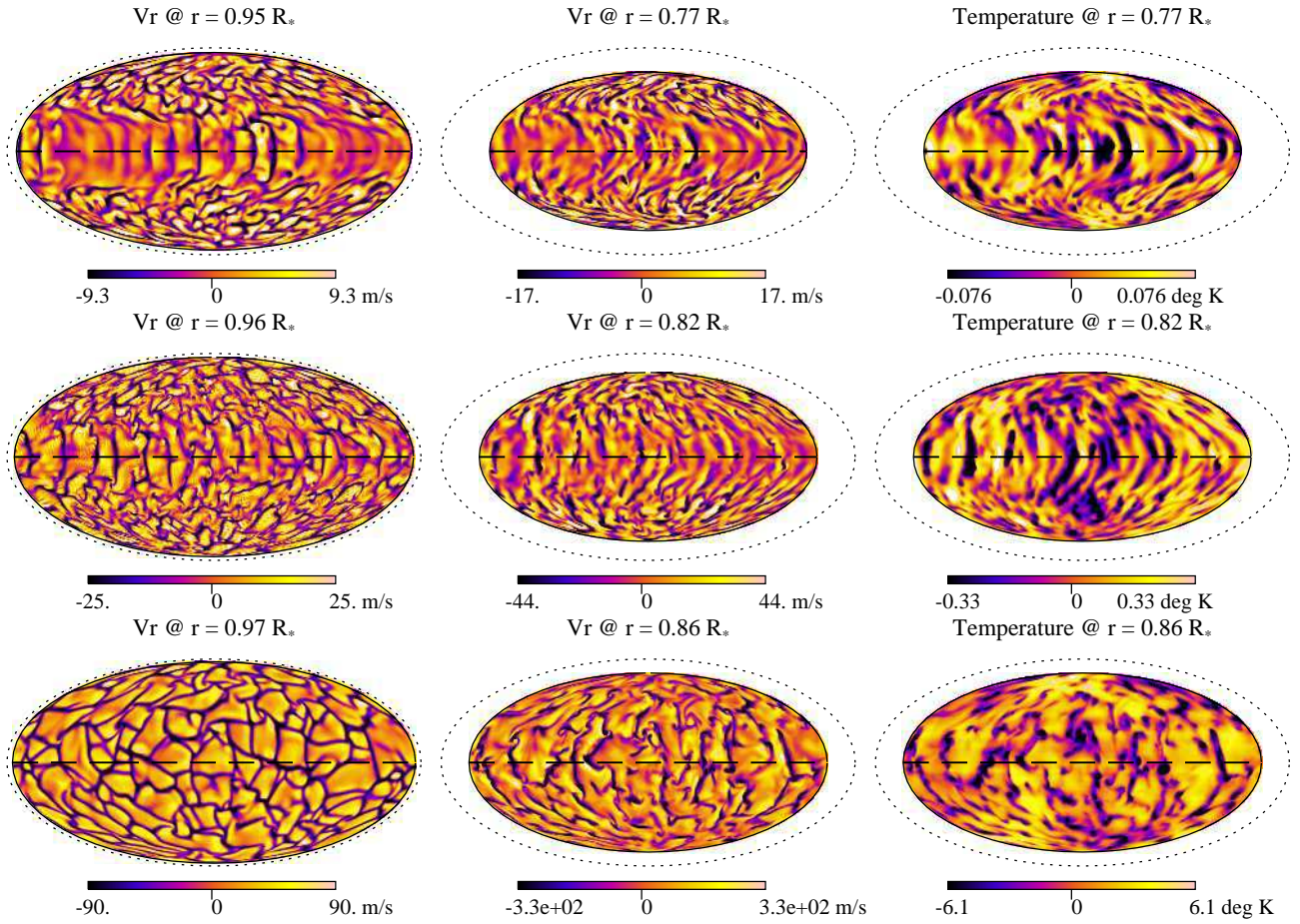
**FIGURE 5.7** – Energies cinétiques intégrées sur tout le domaine, divisées par le volume total en fonction du temps pour l'étoile  $0.5 M_\odot$ . On montre les énergies cinétiques associées à la rotation différentielle (DRKE), la circulation méridienne (MCKE), les mouvements convectifs (CKE) et l'énergie totale (KE).

## 5.4 Propriétés de la convection

Dans cette section, nous allons présenter les propriétés de la convection de chaque étoile et regarder s'il existe des tendances systématiques avec la masse. La [Figure 5.8](#) montre la vitesse radiale sur des coupes à rayon constant, juste sous le bord externe du domaine, et au milieu du domaine de résolution, pour l'étoile à  $0.5$  (panneau supérieur),  $0.7$  (panneau central) et  $1.1 M_\odot$  (panneau inférieur). On note clairement une différence de comportement entre les régions proches de l'équateur et les régions proches des pôles. Ces régions correspondent approximativement à l'intérieur et à l'extérieur respectivement du cylindre tangent (la surface imaginaire parallèle à l'axe de rotation et de rayon  $R_{\text{BCZ}}$ ). A l'intérieur de ce cylindre, la convection est peu affectée par la rotation, alors qu'à l'extérieur la rotation a un effet



plus important, engendrant les "cellules bananes" décrits dans la Section 5.2.3. Cette différenciation est un résultat connu qui peut être compris en étudiant quels sont les modes les plus instables à la convection dans des couches sphériques en rotation (e.g. Gilman, 1975; Busse and Cuong, 1977). Elle est très marquée pour les masses les plus faibles mais devient de moins en moins perceptible alors que la région externe au cylindre tangent s'amenuise (le rayon du cylindre tangent se rapprochant du rayon stellaire). On montre également une coupe de la fluctuation de la température au milieu du domaine (colonne de droite), dans laquelle on a soustrait la composante axisymétrique  $m = 0$ , pour mettre en avant la correspondance entre  $T$  et  $v_r$ . La température y apparaît moins structurée que la vitesse radiale puisque l'on a une diffusivité thermique  $\kappa$  supérieure à la viscosité  $\nu$ , conséquence de notre choix du nombre de Prandtl inférieur à 1 ( $Pr = 0.25$ ).



**FIGURE 5.8** – Projection de Mollweide de coupes à rayon constant pour les étoiles à 0.5 (ligne supérieure), 0.7 (ligne centrale) et 1.1  $M_\odot$  (ligne inférieure), montrant la vitesse radiale proche de la surface (colonne de gauche), au milieu de la CZ (colonne centrale), et les fluctuations de température associées, également au milieu de la CZ (colonne de droite). Dans les coupes de température, la moyenne azimuthale a été soustraite, pour mettre en avant la corrélation avec la vitesse radiale, ce qui est caractéristique du flux d'enthalpie (5.21a). Dans chaque image, la ligne en pointillés correspond à la surface de l'étoile, et les tirets à l'équateur.

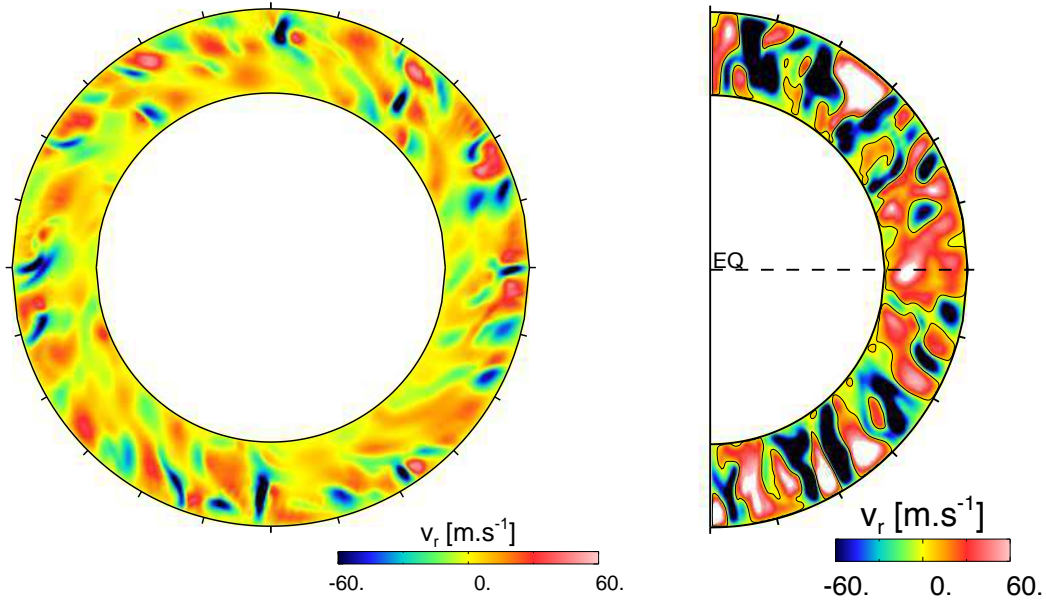
Comme le montre clairement la Figure 5.8, l'étoile à 0.5  $M_\odot$  exhibe des motifs de convection localisés en longitude proche de l'équateur (contrairement aux autres étoiles). Ces inhomogénéités sont en fait le résultat de la juxtaposition de régions où la convection est très vigoureuse mais localisée, et de régions quiescentes. De telles formations, appelées "active nests", ne persistent que pendant quelques périodes de rotation et présentent des vitesses convectives environ 10 fois plus fortes que les zones où

la convection est faible. Le système se comporte alors comme un oscillateur amorti, avec de courtes périodes d'intense convection créant une forte rotation différentielle. Cette dernière cisaille fortement les plumes convectives, supprimant le transport par convection. Puis, en l'absence de convection, le cisaillement décroît à cause de la viscosité jusqu'à l'épisode suivant de convection. Ces phénomènes ont déjà été étudiés en détails par exemple par [Ballot et al. \(2007\)](#) pour des étoiles jeunes à  $1M_{\odot}$  et [Brown et al. \(2008\)](#) pour des étoiles de masse et âge solaire à différents taux de rotation. Les autres modèles d'étoiles présentent au contraire une convection vigoureuse à toutes les longitudes dans l'ensemble de la zone convective, comme on peut le voir pour le cas des étoiles  $0.7$  et  $1.1 M_{\odot}$ , puisqu'elles sont moins influencées par la rotation (nombre de Rossby plus élevé). Il y a donc un lien clair entre l'épaisseur de la zone convective, le taux de rotation et le nombre de Prandtl pour l'émergence de ce phénomène d'active nests comme démontré dans ([Ballot et al., 2007](#)). Il n'est cependant pas sûr que ce phénomène existe vraiment dans les étoiles. Le nombre de Péclet des plumes convectives est probablement sous évalué dans nos modèles, ce qui les empêche de garder leur cohérence en traversant la zone convective. De plus, notre choix  $P_r < 1$  tend à favoriser ces *active nests* qui sont moins prononcés dans les simulations de [Ballot et al. \(2007\)](#) où  $P_r > 1$ . Lorsque  $P_r$  augmente, cela signifie que le nombre de Taylor  $T_a$  diminue, toutes choses étant égales par ailleurs. Autrement dit, la viscosité érode plus efficacement la rotation différentielle. Ainsi, l'inhibition de la convection est réduite, ce qui empêche *in fine* la formation des *active nests*.

Le motif que forme la convection et ses caractéristiques sont fortement influencés par l'échelle de hauteur  $H_{\rho}$ , ainsi que par le contraste qui existe entre la vitesse horizontale (latitudinale et longitudinale) et verticale (radiale) (voir par exemple [Bessolaz and Brun, 2011](#)). Proche de la surface, représentée dans la colonne de gauche de la [Figure 5.8](#), la diffusivité turbulente irrésolue est le principal processus de transport de l'énergie (cf [Figure 5.6](#)). Ce flux, à symétrie sphérique, doit compenser la chute de  $F_{\text{en}}$  qui s'annule en  $r_{\text{top}}$  à cause de la condition limite de mur impénétrable ([5.19a](#)). Il permet donc de contrôler la manière dont chute le flux d'enthalpie dans cette couche limite thermique. Cependant, à cet endroit, tous les cas ont un flux d'enthalpie (convectif) significatif avec un nombre de Reynolds de l'ordre de  $10 - 30$ . Toujours dans cette zone, là où  $H_{\rho}$  est le plus petit, la convection est caractérisée par des cellules chaudes ascendantes et larges, enlacées par un réseau de flots descendants froids et denses (voir par exemple [Cattaneo et al., 1991](#); [Miesch et al., 2008](#)). Ces plumes convectives maintiennent leur cohésion alors qu'elles traversent une bonne partie de la zone convective (les plus fortes traversent même la totalité de la CZ), comme on peut le voir sur la coupe dans le plan de l'équateur de la [Figure 5.9](#) (panneau de gauche). Puis, plus profondément, les colonnes froides fusionnent et perdent leur connectivité par rapport à la surface perdant son motif de *patches* caractéristiques de surface. On remarque en fait que les flots ascendants et descendants ne sont pas radiaux, i.e. alignés avec la gravité locale, mais sont inclinés à cause de la rotation pour être presque alignés avec l'axe des pôles ([Brummell et al., 1996](#)), comme on peut le voir dans le panneau de droite de la [Figure 5.9](#). Ils sont en plus inclinés en dehors du plan méridien par la force de Coriolis, contribuant à la redistribution du moment cinétique via le tenseur de Reynolds.

On représente également dans la [Figure 5.10](#) une coupe proche de la surface de la vitesse radiale et de la vorticité radiale pour l'étoile à  $0.9 M_{\odot}$ , que l'on choisit comme cas représentatif. On distingue très clairement le fait que la vorticité soit concentrée à l'interstice du réseau de flots descendants, résultant en une corrélation négative entre la vitesse et la vorticité radiales. Il s'agit de l'effet de la force de Coriolis sur les mouvements convectifs alors qu'ils convergent pour former ce réseau. Les parcelles de fluide issues des flots ascendants se dirigent vers ces zones de pression plus faibles, et se trouvent déviées par la force de Coriolis, générant des 'cyclones' semblables à ceux crées dans l'atmosphère terrestre. Les vortex à ces endroits sont alors antihoraires (i.e. une composante radiale positive) dans l'hémisphère nord et horaires dans l'hémisphère sud. On dit alors que la vorticité est cyclonique.

Dans toutes les étoiles, le motif de la convection évolue sur des échelles de temps de l'ordre de la



**FIGURE 5.9** – Coupe équatoriale (à gauche) et méridionale (à droite) de la vitesse radiale (positive en rouge et négative en bleue) pour l'étoile à  $0.7 M_{\odot}$ .

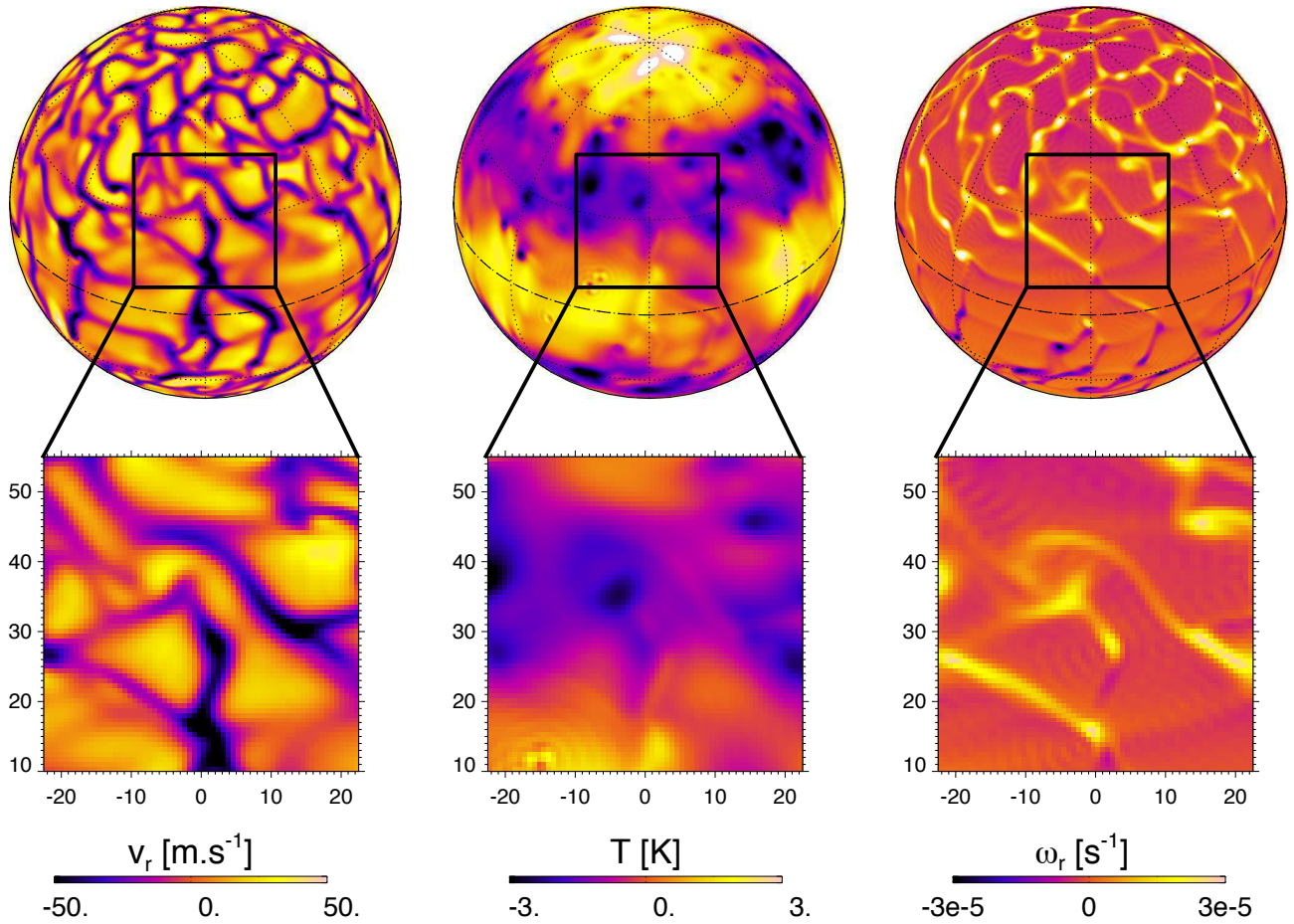
semaine ou du mois, avec des cellules qui, alternativement, fusionnent, se scindent, ou disparaissent. La série d'images de la [Figure 5.11](#) représente l'évolution de la vitesse radiale proche de la surface au cours d'une période de rotation solaire. Elle met en avant le réseau d'écoulements descendants (montré en couleurs plus sombres) que l'on peut suivre plus facilement d'une image à une autre. L'évolution de ces structures est principalement influencée par l'écoulement prograde proche de l'équateur et rétrograde dans les régions plus proches des pôles, signature de la rotation différentielle par rapport au référentiel tournant. Les cellules convectives subissent à la fois des étirements, cisaillements mais aussi fusionnent comme on peut le voir en suivant les structures numérotées 1 et 2. À hautes latitudes, le mouvement est rétrograde et le réseau d'écoulements descendants semble plus intriqué à cause en partie de la taille plus réduite des cellules convectives qui forment régulièrement de nouveaux réseaux déchirant les cellules existantes.

L'évolution de la convection dans l'étoile la plus massive est cependant plus rapide (d'au moins un ordre de grandeur) que dans le cas de l'étoile la moins massive. D'autre part, la convection est partiellement advectée par le cisaillement local auquel elle est soumise. Selon si cet écoulement est prograde ou rétrograde, elle est déviée vers la droite ou la gauche respectivement, ce qui est particulièrement visible proche de l'équateur, où la convection a tendance à être plus alignée avec l'axe de rotation. À plus haute latitude, au delà du cylindre tangent, les cellules convectives sont moins alignées avec l'axe de rotation et ont une structure plus isotrope.

La [Table 5.3](#) liste les vitesses rms au milieu du domaine de simulation, i.e. au milieu de la zone convective. Il est clair que l'ensemble des composantes des vitesses convectives croît avec la masse. De même, la fluctuation de température rms ( $\bar{T}$ ) augmente avec la masse, ce qui signifie un plus grand contraste entre les plumes ascendantes et descendantes, comme on peut le voir dans la [Table 5.3](#) mais aussi dans la colonne de droite de la [Figure 5.8](#). Cette tendance est encore plus évidente si l'on considère la fluctuation de température relative à la moyenne, puisque la température moyenne, par exemple de l'étoile à  $1.1 M_{\odot}$  est environ 3 fois plus basse que celle de l'étoile à  $0.5 M_{\odot}$  au milieu de leur zone convective respective<sup>8</sup> (cf [Table 5.1](#) et panneau supérieur droit de la [Figure 5.5](#)). De plus, la densité moyenne dans l'enveloppe convective décroît avec la masse (au milieu de la CZ, la densité de l'étoile

8. même si la température effective de surface est plus élevée

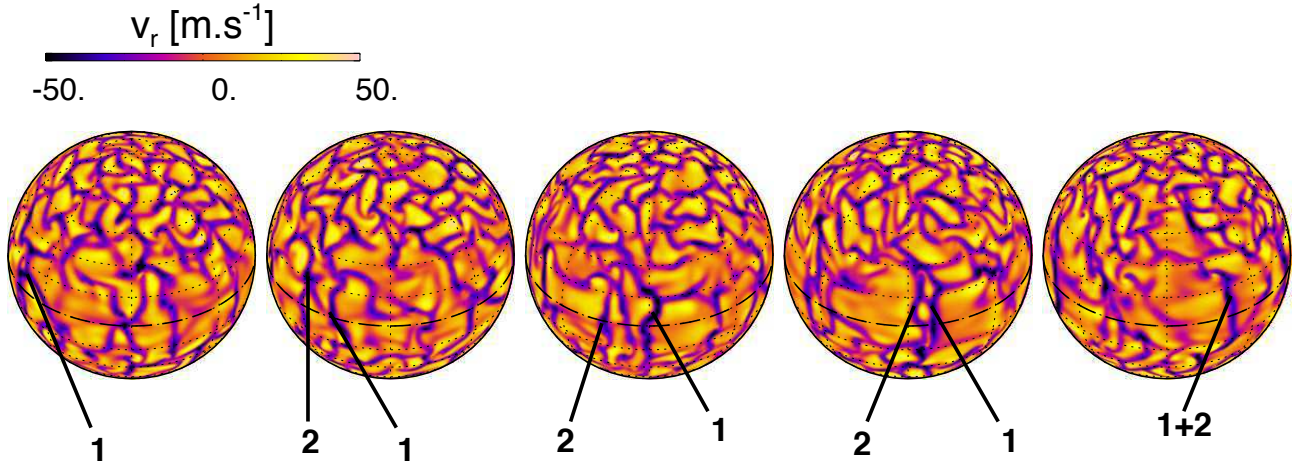




**FIGURE 5.10** – *De gauche à droite* : Composante radiale de la vitesse, température et composante radiale de la vorticité dans la partie supérieure de la zone convective pour l'étoile à  $0.9 M_{\odot}$ . Les projections sont montrées avec le pôle nord incliné de  $35^{\circ}$  par rapport à l'observateur. L'équateur est indiqué par une ligne horizontale. Dans les panneaux inférieurs, on montre un agrandissement de  $45^{\circ}$  et qui s'étendent des latitudes  $10^{\circ}\text{N}$  à  $55^{\circ}\text{N}$ .

à  $1.1 M_{\odot}$  est environ 280 fois plus faible que dans l'étoile à  $0.5 M_{\odot}$ , cf panneau supérieur gauche de la [Figure 5.5](#), ce qui réduit d'autant plus l'efficacité de la convection à transporter l'énergie. Malgré la faible densité de leur zone convective, les étoiles les plus massives sont capables de transporter vers la surface une énergie plus élevée (car  $L_*$  est plus élevée), grâce à la combinaison de plusieurs effets : un rayon stellaire  $R_*$  plus grand, une amplitude de vitesse convective plus élevée, et un contraste de température entre les flots ascendants et descendants plus élevé.

Enfin, on liste également dans la [Table 5.3](#) les nombres de Reynolds, Rossby et Péclet pour chaque modèle. Les nombre de Reynolds et Péclet varient peu et ne montrent aucune tendance claire avec la masse. Ces valeurs ne sont, en plus, que le reflet de nos choix de diffusivités  $\nu_{\text{top}}$ , et non pas une propriété intrinsèque des étoiles. Avec les choix de  $\nu_{\text{top}}$  présentés dans la [Table 5.2](#), le cas  $0.5 M_{\odot}$  possède le nombre de Reynolds le plus élevé. Au contraire, le nombre de Rossby ne dépend pas fortement de notre choix de diffusivités, et augmente fortement avec la masse, principalement à cause de l'accroissement des vitesses convectives, pour un taux de rotation constant. Pour la même raison, le temps de retournement convectif diminue rapidement avec la masse (d'un ordre de grandeur entre l'étoile à  $0.5$  et  $1.1 M_{\odot}$ ). Cette dernière tendance va avoir des conséquences sur la rotation différentielle des étoiles modélisées comme nous allons immédiatement le discuter.



**FIGURE 5.11** – Évolution temporelle de la convection proche de la surface sur une période de rotation solaire pour le modèle à  $0.9 M_{\odot}$ . Chaque image est séparée d’une période d’environ 7 jours. Les structures (1 et 2) suivies par les traits noirs mettent en avant la fusion de deux écoulements descendants.

**TABLE 5.3** – Résultats de la simulation pour chaque modèle d’étoile. Le temps physique d’évolution écoulé depuis le début de la simulation est noté  $t_f$ . La moyenne temporelle de la moyenne quadratique (rms) de chaque composante de la vitesse  $\tilde{v}_r$ ,  $\tilde{v}_\phi$ ,  $\tilde{v}_\theta$ , la vitesse totale  $\tilde{v}$ , les fluctuations de la vitesse  $\tilde{v}'_\phi$  et  $\tilde{v}'$  sont évaluées au milieu du domaine et exprimées en  $\text{m.s}^{-1}$ . La moyenne temporelle de la température rms au milieu du domaine est noté  $\tilde{T}$ . On liste également le nombre de Reynolds rms  $\tilde{R}_e \equiv \tilde{v}'L/\nu$ , le nombre de Rossby  $\tilde{R}_o \equiv \tilde{v}'/(2\Omega_0 L)$ , et le nombre de Péclet  $\tilde{P}_e \equiv \tilde{v}'L/\kappa$ , évalués au milieu du domaine, et le temps de retournement convectif  $\tau_{\text{to}} \equiv L/\tilde{v}_r$ .  $\Delta\Omega$  est la différence de rotation au bord externe entre les latitudes  $0^\circ$  et  $60^\circ$ .  $\Delta T$  est la différence de la moyenne azimuthale et temporelle de la température à la BCZ ( $R_{\text{BCZ}}$ ), entre les mêmes latitudes. Enfin,  $\tilde{v}_{\text{mc}}$  est la vitesse rms de la circulation méridienne, calculé à partir de la moyenne azimuthale et temporelle de la vitesse poloidale, et en prenant la valeur rms de toutes les valeurs au milieu du domaine.

Masse ( $M_{\odot}$ )	$t_f$ (yr)	$\tilde{v}_r$ (m/s)	$\tilde{v}_\theta$ (m/s)	$\tilde{v}_\phi$ (m/s)	$\tilde{v}'_\phi$ (m/s)	$\tilde{v}$ (m/s)	$\tilde{v}'$ (m/s)	$\tilde{T}$ (K)	$\tilde{R}_e$	$\tilde{R}_o$	$\tilde{P}_e$	$\tau_{\text{to}}$ (day)	$\Delta\Omega/\Omega_0$ (%)	$\Delta T$ (K)	$\tilde{v}_{\text{mc}}$ (m/s)
0.5	30	8.7	9.8	37	9.3	40	16	0.22	309	0.025	77	164	37	0.61	0.29
0.7	28	20	21	74	21	79	36	0.76	139	0.049	35	82	41	2.2	0.64
0.9	22	47	45	95	50	115	82	1.3	151	0.094	38	41	30	3.6	1.5
1.1	8.6	150	134	242	136	314	241	6.1	133	0.24	33	15	-42	-9.9	22

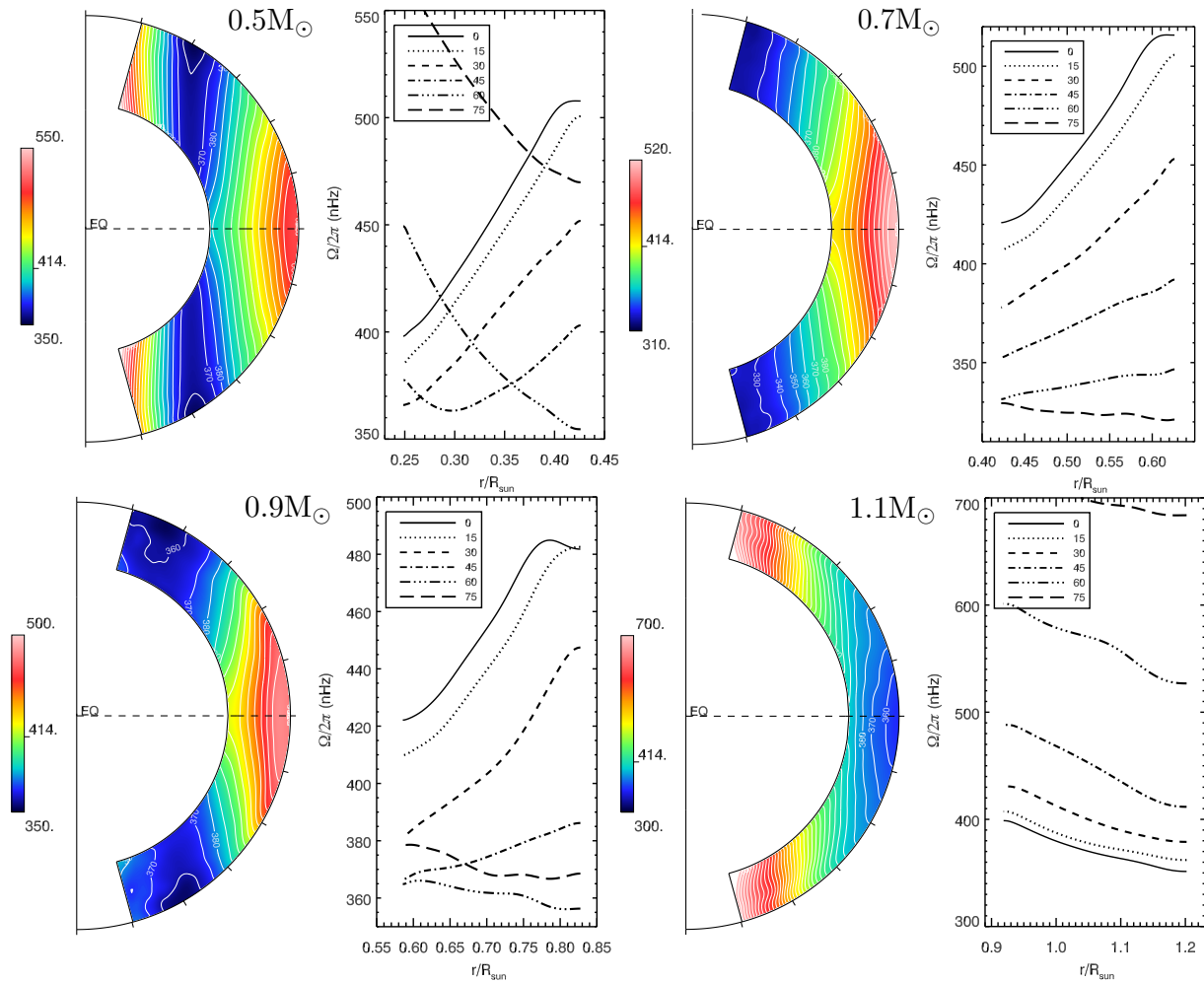
## 5.5 Écoulements à grandes échelles

Dans cette Section, on s’intéresse aux propriétés des écoulements à grande échelle telles que la rotation différentielle et la circulation méridienne, et comment leurs caractéristiques changent en fonction de la masse de l’étoile.

### 5.5.1 Rotation différentielle

On montre la rotation différentielle  $\Omega(r, \theta) = \Omega_0 + \frac{\langle v_\phi(r, \theta) \rangle}{r \sin \theta}$  dans une coupe méridienne pour les 4 modèles d’étoiles dans la [Figure 5.12](#). La rotation différentielle dans nos simulations provient du transport de moment cinétique par les mouvements convectifs sous l’influence de la rotation, stratification et de la géométrie sphérique (voir par exemple [Brun et al., 2011](#)). Comme la vitesse angulaire dans

chacun des cas fluctue dans le temps, il est nécessaire de moyenner sur de longues périodes de temps (de l'ordre de plusieurs périodes de rotation) pour mettre en avant le profil moyen montré dans la **Figure 5.12**. On ne représente pas la région proche des pôles puisqu'il est difficile d'obtenir une moyenne stable sur une petite région, alors que les fluctuations temporelles restent significatives. Chaque cas montre des contours d'isrotation quasiment alignés avec l'axe de rotation. Ce comportement est typique des simulations qui ne possèdent pas de gradient latitudinal d'entropie forcé à la base de la zone convective<sup>9</sup> (Ballot et al., 2007; Miesch et al., 2006). L'absence de ce gradient dans nos simulations ne nous permet pas, certes, de conclure sur le profil de rotation effectivement établi dans les étoiles, mais va nous permettre d'identifier le rôle clé de l'interface zone radiative/zone convective (via le gradient d'entropie), comme nous allons le voir dans le Chapitre 6.



**FIGURE 5.12** – Fréquence de rotation moyennée dans le temps et sur l'azimut dans une coupe méridienne des étoiles de masse 0.5, 0.7, 0.9 et 1.1  $M_{\odot}$  dans le sens de lecture.

Le taux de rotation dans le cas de l'étoile à 0.5  $M_{\odot}$  possède un minimum à moyenne latitude, un maximum local à l'équateur au bord externe et un maximum global proche des pôles. Une telle rotation différentielle en "bandes" a déjà été obtenu dans des précédentes simulations avec le code ASH (Bessolaz and Brun, 2011; Browning, 2008). Les cas 0.7 et 0.9  $M_{\odot}$  sont ceux dont la rotation différentielle est la plus semblable à celle du Soleil (cf Section 1.5), avec un taux de rotation qui est plus

9. Cet effet est censé mimer la présence d'une tachocline. Dans le Chapitre 6, nous allons modéliser de façon cohérente la présence de cette région en incorporant une zone radiative à nos modèles.

élevé à l'équateur (prograde) et qui décroît de façon monotone jusqu'aux pôles (rétrograde). L'étoile à  $1.1 M_{\odot}$ , au contraire, montre une rotation différentielle anti-solaire, avec les régions équatoriales tournant moins vite qu'aux pôles. Un tel renversement de la rotation différentielle a déjà été observé dans les simulations de [Bessolaz and Brun \(2011\)](#), et était dû à l'étroitesse de la zone convective. Dans leur étude, la structure interne et la luminosité étaient fixes, et seule variait l'épaisseur de la zone convective. Lorsque la taille de la zone convective augmente, la rotation devient de plus en plus importante car elle agit sur une plus grande distance. Autrement dit, le nombre de Rossby  $R_o$  diminue. Lorsque  $R_o$  est suffisamment faible, la rotation différentielle devient solaire, ce comportement ayant été aussi reporté par [Gilman \(1979\)](#); [Glatzmaier and Gilman \(1982\)](#); [Browning et al. \(2004\)](#). En effet, au cours du déplacement des plumes convectives, ces dernières sont de plus en plus influencées par la rotation, les déviant de leur direction radiale. Il en résulte un changement progressif de la redistribution du moment cinétique par le tenseur de Reynolds, source de cette rotation différentielle (voir par exemple [Ruediger, 1989](#); [Brun and Toomre, 2002](#); [Brown et al., 2008](#)). Ceci suggère que dans notre étude, le changement de profil est plutôt dû à l'épaisseur relative de la zone convective plutôt qu'aux autres propriétés intrinsèques de l'étoile. L'enveloppe convective de l'étoile à  $1.1 M_{\odot}$  a une taille semblable à celle de [Bessolaz and Brun \(2011\)](#) montrant un profil de rotation anti-solaire. La différence de rotation relative  $\Delta\Omega/\Omega_0$ , mesurée au bord externe entre  $0$  et  $60^\circ$  en latitude (cf [Table 5.3](#)), varie de 30 à 42% dans chaque cas. À notre connaissance, aucune detection de rotation différentielle anti-solaire n'a été reportée.

Chaque cas montre (en moyenne dans le temps) également un gradient latitudinal de température axisymétrique. Pour les 3 étoiles les plus massives, ce gradient est caractérisé par une variation monotone de l'équateur vers les pôles. L'étoile à  $1.1 M_{\odot}$  possède un équateur plus chaud, alors que la  $0.7$  et  $0.9 M_{\odot}$  ont des pôles plus chauds (cf [Figure 5.13](#)), comme dans le cas des simulations numériques du Soleil (voir par exemple [Brun and Toomre, 2002](#)). Le profil de température pour l'étoile à  $0.5 M_{\odot}$  est plus complexe avec un maximum à moyenne latitude, similaire à la structure en bandes de la rotation différentielle.

Cette similarité peut s'expliquer en considérant l'équation du vent thermique ([D.12](#)) que l'on peut déduire des équations du mouvement (cf Annexe D), et que l'on rappelle ici :

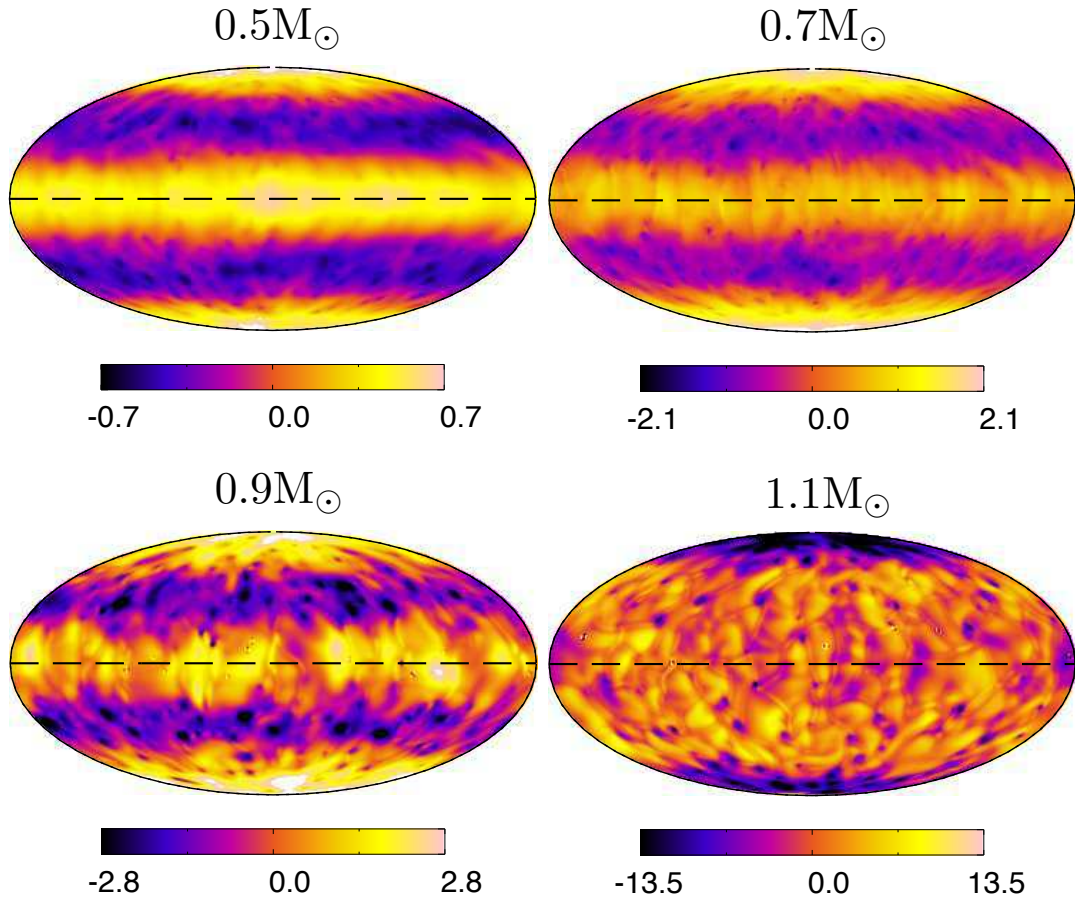
$$\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 r c_p} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (5.24)$$

À un gradient d'entropie correspond un gradient de température. Dans le cas où ce gradient est nul, on retombe sur la contrainte de Taylor Proudman selon laquelle un fluide sous l'influence de la rotation tend à être aligné avec l'axe de rotation ( $\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0$ ). En présence d'un gradient latitudinal de température (comme c'est le cas ici), on brise la cylindricité de l'écoulement, ce qui donne lieu à une rotation différentielle non cylindrique. Cette équation est strictement vérifiée lorsque  $R_o \ll 1$  (cf [Section D.2](#)). Bien que nos simulations ne satisfont pas exactement ce critère, elle permet néanmoins de mieux comprendre le profil de la rotation différentielle. L'avant dernière colonne de la [Table 5.3](#) donne la moyenne azimuthale et temporelle de la différence de température entre l'équateur et  $60^\circ$  en latitude, à la base de la zone convective. Il est alors clair que le gradient de température est plus grand pour les étoiles les plus massives. On note alors que le changement de signe de la variation de température coïncide avec le renversement du profil de la rotation différentielle.

### 5.5.2 Circulation méridienne

La moyenne temporelle de la circulation méridienne pour les 4 modèles d'étoiles considérés est représentée dans la [Figure 5.14](#) dans laquelle la taille relative entre chaque étoile a été conservée. On représente cette circulation à l'aide de contours de la fonction de courant  $\psi$  défini comme dans [Miesch et al. \(2000\)](#).



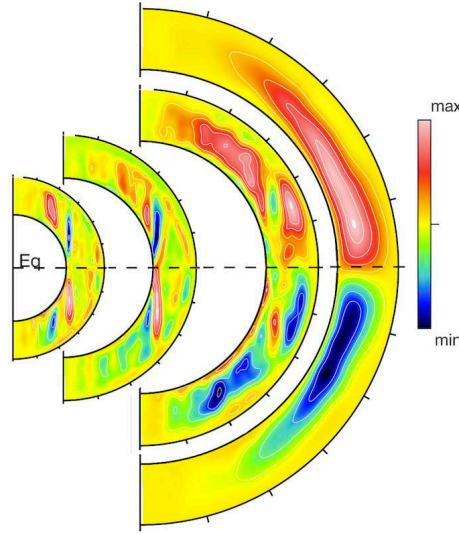


**FIGURE 5.13** – Projection de Mollweide de coupes à rayon constant pour les 4 modèles d'étoiles (de gauche à droite et de haut en bas) de la fluctuation de température proche de la surface. Les valeurs sont données en Kelvin.

$$r \sin \theta \langle \bar{\rho} v_r \rangle = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (5.25a)$$

$$r \sin \theta \langle \bar{\rho} v_\theta \rangle = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (5.25b)$$

Cette circulation doit son origine, dans le cas hydrodynamique, aux forces de flottaison, des gradients de pression, des tenseurs de Reynolds et de la force de Coriolis agissant sur l'écoulement zonal moyen, et résulte des écarts à l'équilibre géostrophique (cf Section 2.2.3 et D.2 pour plus de détails). Ces écarts sont la réponse à la nature fluctuante de la convection. Pour rétablir l'équilibre, le système va alors redistribuer le moment cinétique via le mécanisme de pompage gyroscopique (Garaud and Bodenheimer, 2010) qui génère alors la circulation méridienne. Comme tous ces processus sont en compétition, il est difficile de prédire quelle forme aura cette dernière, ni de combien de cellules elle sera constituée, que ce soit en rayon ou en latitude. Comme l'énergie cinétique associée à la circulation méridienne (MCKE) est typiquement de 2 ordres de grandeurs inférieurs à l'énergie cinétique associée à la rotation différentielle (DRKE), comme on peut le voir sur la Figure 5.7, de faibles variations de la rotation différentielle peuvent engendrer des variations importantes de cette circulation. Il en est de même par rapport au tenseur de Reynolds généré par la convection dont l'énergie (CKE) est grande devant MCKE. Ceci explique la dépendance temporelle complexe de ces écoulements méridiens et la



**FIGURE 5.14** – Contours de la fonction de courant  $\psi$  représentant la circulation méridienne pour les modèles d'étoile à 0.5, 0.7, 0.9 et 1.1  $M_{\odot}$  (de gauche à droite), où la taille relative des étoiles a été conservée. Les contours suivent les lignes de courant moyennées sur l'azimut et dans le temps. L'écoulement dans le sens horaire est représenté en rouge, et le sens anti horaire en bleu. L'axe de rotation de l'étoile est verticale et dirigé vers le haut.

nécessité d'en prendre une moyenne temporelle très longue pour faire émerger son profil global<sup>10</sup>.

Pour les deux étoiles les plus massives, la circulation est dominée par un large écoulement unicellulaire, qui va de l'équateur vers les pôles en surface et des pôles vers l'équateur à la base de la zone convective, similaire à celle détectée dans le Soleil (cf Section 2.2.3). Il s'agit du profil qui est souvent utilisé dans les modèles de dynamo champ moyen dans les cas solaires (cf Partie II). Cependant, lorsque la masse diminue, cette circulation a tendance à se subdiviser en de multiples sous structures (à la fois en rayon et en latitude) dont les vitesses sont alignées avec l'axe de rotation. La dernière colonne de la Table 5.3 montre les amplitudes caractéristiques atteintes par la circulation méridienne, évaluées au milieu du domaine. Cette vitesse est comparativement faible par rapport à la convection, le rapport  $\tilde{v}_{mc}/\tilde{v}$  variant de 2% pour les étoiles 0.5, 0.7 et 0.9  $M_{\odot}$  à 9% pour l'étoile la plus massive. De même que pour les vitesses convectives, l'amplitude de la circulation méridienne s'accroît fortement avec la masse. Comme la taille physique des cellules augmente avec la masse (comme on peut le voir sur la Figure 5.14), le temps caractéristique associé à ces circulations est finalement similaire pour toutes les étoiles. Cette fragmentation des cellules de circulation lorsque la taille de la zone convective augmente a été déjà vue dans les simulations de Bessolaz and Brun (2011), suggérant que cet effet peut être dû à la taille de la zone convective plutôt qu'aux propriétés intrinsèques des étoiles. La forme du tenseur de Reynolds est certainement à l'origine de ces cellules multiples. On peut donc penser que ces structures sont également liées au nombre de Rossby.

## 5.6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats issus de simulations 3D dynamiques de la zone convective d'étoiles de type solaire de masse variant de 0.5 à 1.1  $M_{\odot}$  et tournant au taux de rotation solaire  $\Omega_{\odot}$ . Comme expliqué dans la Section 5.3.2, la luminosité de ces étoiles varie d'un facteur 40 et leur zone convective contient une masse de 19% à 1% de la masse solaire. De plus, bien que la taille

10. En présence de champ magnétique, le tenseur de Maxwell peut également être en mesure de perturber cet équilibre et affecter profondément la structure de la circulation méridienne (Haber et al., 2002; Švanda et al., 2008; Jouve and Brun, 2009).

absolue de leur zone convective n'augmente que peu avec la masse (de 19% à 31% du rayon solaire), la taille relative décroît significativement avec la masse de l'étoile (de 44% à 24% du rayon stellaire). Ces différences entre les étoiles influencent profondément la dynamique interne des étoiles et modifient leurs propriétés hydrodynamiques.

Nous trouvons que les vitesses et le contraste de température flots ascendants/descendants, associé à la convection augmentent considérablement avec la masse. En effet, alors que la masse de l'étoile augmente, sa luminosité (donc la quantité totale d'énergie à transporter) augmente. De plus, la densité de l'enveloppe convective diminue. La combinaison de ces deux effets requiert alors une convection plus vigoureuse puisque tous les autres processus de transport restent négligeables au cœur de la zone convective (cf [Figure 5.6](#)). En conséquence, le nombre de Rossby (pour un taux de rotation constant) augmente proportionnellement à la vitesse, réduisant alors le temps de retournement convectif. L'étoile de plus faible masse montre des caractéristiques convectives particulières avec la présence d'active nests, zones de convection vigoureuses localisées en longitude et le temps, le long des régions équatoriales. La présence de ces active nests semblent être liée à la fois au nombre de Rossby et au nombre de Prandtl. En effet, ils apparaissent dans les simulations où  $P_r = 0.25$  ([Ballot et al., 2007](#); [Brown et al., 2008](#)) mais pas dans les simulations où  $P_r = 1.0$  ([Ballot et al., 2007](#); [Bessolaz and Brun, 2011](#)), toutes choses étant égales par ailleurs. À faible  $P_r$ , l'amplitude relative du cisaillement local tend à être plus grand, pouvant inhiber le mouvement radial des mouvements convectifs.

Le profil de rotation différentielle possède un maximum local à la surface à l'équateur sauf pour l'étoile la plus massive, et les quatre cas ont des valeurs  $\Delta\Omega$  comparables. Les étoiles de masses  $0.7$  et  $0.9 M_\odot$  sont celles montrant un profil de rotation le plus semblable au Soleil avec une rotation prograde aux régions équatoriales et rétrogrades aux régions polaires. Cependant, les cas les plus extrêmes diffèrent : l'étoile à  $0.5 M_\odot$  montre une rotation différentielle en bandes, c'est-à-dire avec un minimum à moyenne latitude puis à nouveau un maximum aux pôles, alors que l'étoile la plus massive ( $1.1 M_\odot$ ) a un profil anti-solaire, i.e. avec des pôles plus rapides que l'équateur. Les contours d'isorotation (cf [Figure 5.12](#)) des 4 simulations sont quasi-alignés avec l'axe de rotation, suivant la contrainte de Taylor Proudman. À partir de simulations de la zone convective solaire (dans laquelle les contours d'isorotation ne sont pas alignés avec l'axe de rotation mais de direction radiale) (e.g. [Miesch et al., 2006](#)), on sait que cette contrainte peut être brisée grâce à des gradients latitudinaux de température ou d'entropie (cf équation (B.1)). Une différence de température de l'ordre d'une dizaine de Kelvin (à la rotation solaire) est suffisant pour rendre un profil de rotation initialement cylindrique, aligné radialement. De tels gradients existent dans nos simulations mais les conditions limites imposées à la base de la zone convective limitent leurs effets ([Miesch et al., 2006](#)). En déplaçant le bord interne profondément dans la zone radiative (réduisant ainsi son influence), [Brun et al. \(2011\)](#) ont montré que la présence d'une tachocline dynamiquement cohérente résultait en un fort vent thermique, rétablissant une rotation différentielle plus proche de celle observée dans le Soleil (i.e. conique, plus alignée avec la direction radiale).

La circulation méridienne est elle dominée par une large cellule dans chaque hémisphère pour les 2 étoiles les plus massives. Cependant, cette cellule perd progressivement sa cohérence et se fragmente en de multiples cellules, alignées avec l'axe de rotation, à la fois en rayon et en latitude lorsque la masse diminue.

Dans le Chapitre 6, des simulations plus réalistes incorporant une zone radiative pour les étoiles étudiées ici seront développées, afin de prendre en compte le couplage entre la zone convective et la zone stable sous jacente. Nous verrons alors quels sont les effets de la présence d'une tachocline sur les propriétés globales de la convection. D'autre part, nous étudierons les effets de différents taux de rotation, en particulier plus rapides que le taux solaire, pour comprendre quelles sont les propriétés de ces étoiles lorsqu'elles étaient plus jeunes (cf Section 1.5). Et enfin, nous introduirons le champ magnétique (dans le Chapitre 7) pour en déduire ses effets et ses propriétés de génération par effet dynamo.





# Astronomical Notes

## Astronomische Nachrichten

Founded by H. C. Schumacher in 1821

### Editors

K. G. Strassmeier (Potsdam/Editor-in-Chief),  
A. Brandenburg (Stockholm), G. Hasinger (Garching),  
R.-P. Kudritzki (Honolulu), T. Montmerle (Grenoble),  
H. W. Yorke (Pasadena)

 **WILEY-VCH**

**REPRINT**

# Convection and differential rotation properties of G and K stars computed with the ASH code

S.P. Matt<sup>1,\*</sup>, O. Do Cao<sup>1</sup>, B.P. Brown<sup>2</sup>, and A.S. Brun<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire AIM Paris-Saclay, CEA/Irfu Université Paris-Diderot CNRS/INSU, 91191 Gif-sur-Yvette, France

<sup>2</sup> Department of Astronomy and Center for Magnetic Self Organization in Laboratory and Astrophysical Plasmas, University of Wisconsin, 475 N. Charter St., Madison WI 53706, USA

Received 2011 Oct 7, accepted 2011 Nov 3

Published online 2011 Dec 12

**Key words** convection – hydrodynamics – stars: interiors – stars: rotation – turbulence – methods: numerical

The stellar luminosity and depth of the convective envelope vary rapidly with mass for G- and K-type main sequence stars. In order to understand how these properties influence the convective turbulence, differential rotation, and meridional circulation, we have carried out 3D dynamical simulations of the interiors of rotating main sequence stars, using the anelastic spherical harmonic (ASH) code. The stars in our simulations have masses of 0.5, 0.7, 0.9, and 1.1  $M_{\odot}$ , corresponding to spectral types K7 through G0, and rotate at the same angular speed as the Sun. We identify several trends of convection zone properties with stellar mass, exhibited by the simulations. The convective velocities, temperature contrast between up- and downflows, and meridional circulation velocities all increase with stellar luminosity. As a consequence of the trend in convective velocity, the Rossby number (at a fixed rotation rate) increases and the convective turnover timescales decrease significantly with increasing stellar mass. The three lowest mass cases exhibit solar-like differential rotation, in a sense that they show a maximum rotation at the equator and minimum at higher latitudes, but the 1.1  $M_{\odot}$  case exhibits anti-solar rotation. At low mass, the meridional circulation is multi-cellular and aligned with the rotation axis; as the mass increases, the circulation pattern tends toward a unicellular structure covering each hemisphere in the convection zone.

© 2011 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

## 1 Introduction

The Sun and Sun-like stars with convection zones in their outer envelopes, have long been known to exhibit emission line and X-ray activity, associated with hot gas in chromospheres, transition regions, and coronae (e.g., Pizzolato et al. 2003; Strassmeier et al. 1990; Wright et al. 2011). Understanding this activity, and understanding how the solar case relates to the activity observed across the HR diagram is a long-standing puzzle. It is clear that the existence of hot gas above the photosphere is related to magnetic processes associated with the convection zone itself. The magnetic field of low-mass main sequence stars is generally believed to be generated by dynamo processes, which derive their properties from convective motions, differential rotation, and meridional circulations in the convection zones, as well as from the interaction between the convection zone and the radiative interior.

Recent observations, by either spectropolarimetry (e.g., Donati et al. 2003), doppler imaging (e.g., Barnes et al. 2005), or monitoring of various activity indicators (e.g., Baliunas et al. 1995; Donahue et al. 1996; Lovis et al. 2011; Oláh et al. 2009; Saar & Brandenburg 1999), show that solar-like stars possess activity cycles and differential rotation, analogous to the Sun. Solar analogues are even starting to be discovered (Petit et al. 2008).

In order to gain a better theoretical understanding of how convective properties depend upon stellar parameters, we carry out 3D numerical dynamical simulations of convective envelopes of solar-like stars. As a first step, we model here the convective regions only, neglecting the effects of the interface region with a radiative envelope, and restrict ourselves to relatively slow (solar) rotation rates. Specifically, we simulate the convection dynamics for 4 main sequence stars with masses of 0.5, 0.7, 0.9, and 1.1 solar masses, spanning spectral types G0 to K7. This mass interval exhibits a large range of the physical properties of convective envelopes (such as the depth, physical size, mass, and density), as well as in the overall stellar luminosity transported by convection. These types of stars are also targets for asteroseismic studies (e.g., Verner et al. 2011), which have the potential to give precise measurements of stellar properties for large numbers of stars. The goal here is to determine how the convection, differential rotation, and meridional circulation is influenced by stellar mass, and to see if general trends or scaling laws can be extracted that will guide a deeper understanding of the inner hydrodynamics of these stars. The present study lays the groundwork for later studies to consider, e.g., faster rotation rates, convection-radiation zone interface dynamics, and the dynamo generation of magnetic fields in stars in this mass range.

Section 2 contains a description of our simulation method and presents a comparison of the overall structures

\* Corresponding author: sean.matt@cea.fr

of each star. Section 3 describes the main results of our 3D simulations, focusing on both the convective turbulence properties, as well as the differential rotation and meridional circulation flows. A summary and brief discussion is contained in Sect. 4.

## 2 Simulation method

We use the anelastic spherical harmonic (ASH) code (Clune et al. 1999) to compute the 3-dimensional and turbulent flows in convectively unstable stellar envelopes. This code has been extensively tested and used for computing several aspects of the solar interior (e.g., Browning et al. 2006; Brun & Toomre 2002; Brun et al. 2004; DeRosa et al. 2002; Miesch et al. 2006), rapidly rotating young stars (Ballot et al. 2007; Brown 2009; Brown et al. 2008, 2011), the convective cores of massive stars (Browning et al. 2004a,b; Featherstone et al. 2009), fully convective low mass stars (Browning 2008), red giant stars (Brun & Palacios 2009), and pre-main-sequence stars (Bessolaz & Brun, in this volume; Bessolaz & Brun 2011). We briefly describe the basic aspects of the code here, but the reader can find further details of the code in those previous works (see especially, Brun et al. 2004; Clune et al. 1999).

The code solves the fluid equations, under the anelastic approximation, in a computational domain consisting of a spherical shell and in a rotating reference frame. Under the anelastic approximation, sound waves are filtered out and assumed to have a negligible effect on the dynamics, in order to allow for a larger computational timestep. This approximation is appropriate in the interiors of stars because typical motions are highly sub-sonic. The thermodynamic variables are linearized with respect to a spherically symmetric background state with a density  $\bar{\rho}$ , pressure  $\bar{P}$ , temperature  $\bar{T}$ , and specific entropy  $\bar{S}$  and fluctuations about the background state of  $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ , and  $S$ . The time-dependent equations describe the conservation of mass, momentum, and entropy expressed as

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}] - \nabla \cdot \mathcal{D}, \quad (2)$$

$$\bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{T} \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S) = + \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) + \bar{\rho} \bar{T} (\kappa \nabla S + \kappa_0 \nabla \bar{S})] + 2\bar{\rho} \nu [e_{ij} e_{ij} - 1/3(\nabla \cdot \mathbf{v})^2], \quad (3)$$

where  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi)$  is the velocity in the rotating frame in spherical coordinates,  $\boldsymbol{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{\mathbf{e}}_z$  is the angular rotation rate of the reference frame,  $\mathbf{g}$  is the acceleration due to gravity,  $\kappa_r$  is the radiative diffusivity, and  $c_p$  is the specific heat at constant pressure. The term  $\mathcal{D}$  is the viscous stress tensor, with the components

$$\mathcal{D}_{ij} = -2\bar{\rho} \nu [e_{ij} - 1/3(\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij}], \quad (4)$$

where  $e_{ij}$  is the strain rate tensor, and  $\nu$ ,  $\kappa$ , and  $\kappa_0$  are effective eddy diffusivities. The code also uses a linearized equation of state,

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma \bar{P}} - \frac{S}{c_p}, \quad (5)$$

and the ideal gas law,

$$\bar{P} = \mathcal{R} \bar{\rho} \bar{T}, \quad (6)$$

where  $\gamma$  is the ratio of specific heats (we use  $\gamma = 5/3$ ), and  $\mathcal{R}$  is the gas constant. For all 4 stars in our study, the luminosity has reached a value of more than 99.9 % of the total stellar luminosity at the base of the convection zone, so we do not need to include any energy generation by nuclear burning within our computational domain.

We set up four different models in which the domain boundaries and stratification coincides with 1D models of the convection zones of main-sequence stars with different masses. Section 2.1 describes the global properties of these stars, and Sects. 2.2 and 2.3 describe the initial and boundary conditions used in our ASH models, as well as the method for evolving the simulations to a fully convective, statistical steady-state.

### 2.1 1D stellar structure

In order to define the background structure for our 3D models, we use the 1D stellar evolution code CESAM (Morel 1997). With CESAM, we computed the evolution of four stars with masses of 0.5, 0.7, 0.9, and 1.1  $M_\odot$  until the age of 4.6 Gyr. This age is approximately equal to that of the Sun, so our cases can be compared with the many previous results of solar studies. Also, this age is appropriate for the slow (solar) rotation rates considered here. For all four stars, we assumed the same initial metallicity of  $(X, Y, Z) \approx (0.71, 0.27, 0.02)$  and a mixing length parameter of 1.77, chosen to best represent the solar case. Table 1 lists the key global properties of our four stars, at the age of 4.6 Gyr, which are also graphically represented in Figs. 1–3.

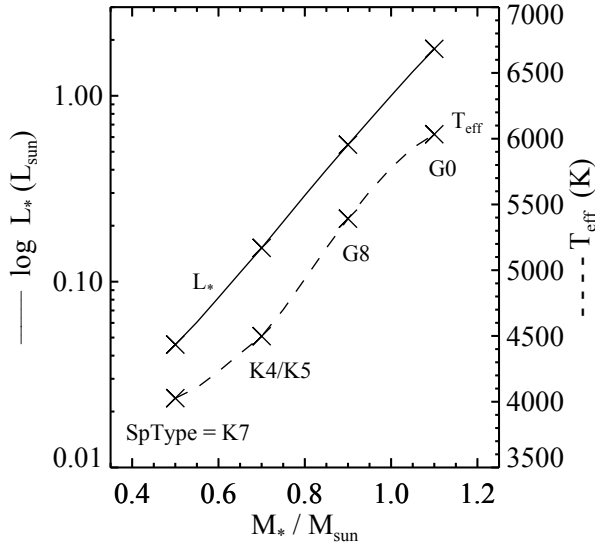
Figure 1 shows the total luminosity (solid line), as well as the effective temperature (dashed line) as a function of mass, for stars in the mass range of our models. The “X” symbols mark the values for the 4 stars modeled here, which are also listed in Table 1. Also indicated on the plot are the approximate spectral types, corresponding to the effective temperature. The Figure demonstrates the steep rise in luminosity with mass expected for main sequence stars (the stars here approximately follow  $L_* \propto M_*^{4.6}$ ), such that the 1.1  $M_\odot$  star is 40 times more luminous than the 0.5  $M_\odot$  star.

Figure 2 shows the photospheric radius  $R_*$  (upper solid line) and the radial location of the base of the convection zone  $R_{cz}$  (lower solid line) as a function of mass. The stellar radius is strong function of stellar mass in the plotted range, with the 1.1  $M_\odot$  star being 2.8 times bigger than the 0.5  $M_\odot$  star. The radial extent of the convection zones for these stars is represented by the region between the two solid lines, and the region below contains a convectively stable radiation zone. It is clear that, in the mass range shown,

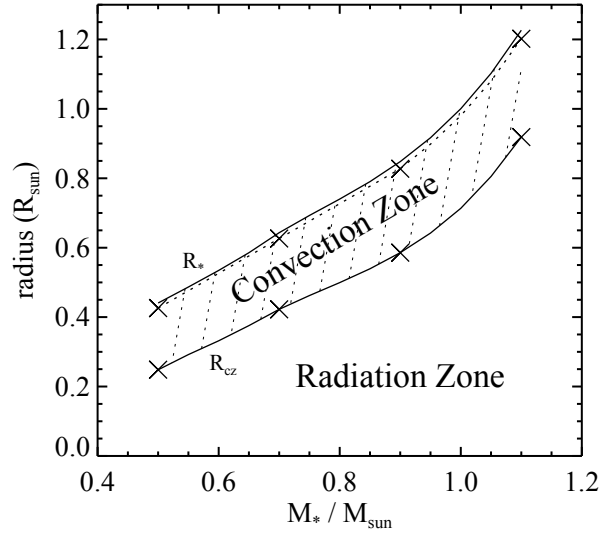


**Table 1** Global properties of the 4 stars used in our ASH models, computed with the CESAM stellar evolution code and at an age of 4.6 Gyr. We adopt  $M_{\odot} = 1.989 \times 10^{33}$  g,  $R_{\odot} = 6.9599 \times 10^{10}$  cm, and  $L_{\odot} = 3.846 \times 10^{33}$  erg s $^{-1}$ .

Mass ( $M_{\odot}$ )	Radius ( $R_{\odot}$ )	$L_*$ ( $L_{\odot}$ )	$T_{\text{eff}}$ (K)	Sp. T.	$M_{\text{cz}}$ ( $M_{\odot}, M_*$ )	$R_{\text{cz}}$ ( $R_{\odot}, R_*$ )	$T(R_{\text{cz}})$ (K)	$\rho(R_{\text{cz}})$ (g cm $^{-3}$ )
0.5	0.44	0.046	4030	K7	0.18, 0.36	0.25, 0.56	$4.3 \times 10^6$	14
0.7	0.64	0.15	4500	K4/K5	0.079, 0.11	0.42, 0.66	$3.0 \times 10^6$	2.1
0.9	0.85	0.55	5390	G8	0.042, 0.046	0.59, 0.69	$2.6 \times 10^6$	0.51
1.1	1.23	1.79	6030	G0	0.011, 0.0100	0.92, 0.75	$1.6 \times 10^6$	0.048



**Fig. 1** Stellar luminosity in solar units (solid line, left scale) and effective temperature (dashed line, right scale) as a function of stellar mass, for the mass range spanned by our models, and as computed using the CESAM stellar evolution code. The “X” symbols indicate the values for the 4 stars used in our 3D ASH simulations. The approximate spectral types are also indicated next to each of these.



**Fig. 2** Stellar radius (upper line) and radial location of the base of the convection zone (lower line) in solar units and as a function of stellar mass, as computed by the CESAM stellar evolution code. The convection zone exists between these two lines, while a convectively stable radiation zone lies below. The “X” symbols indicate the upper and lower radial boundaries of the computational domain used in our ASH simulations, for the 4 cases considered.

the thickness of the convection zone increases slightly with increasing stellar mass. However, since the stellar radius increases more rapidly, the fractional size of the convection zone decreases with increasing mass. Thus, the convection zone thickness ranges from 44 % to 25 % of the stellar radius, for the 0.5 and 1.1  $M_{\odot}$  stars, respectively (for the Sun, this value is approximately 30 %). The “X” symbols indicate the upper and lower boundaries of our 3D simulation domains for the 4 stars simulated (discussed below).

Figure 3 shows the extent of convection zones, expressed in mass coordinates and normalized to the mass of each star, as a function of stellar mass. The lines show the total mass enclosed by the stellar surface (upper line) and enclosed by the location of the base of the convective envelope (lower line). The amount of mass contained in the convection zone,  $M_{\text{cz}}$ , is the difference between these two lines and is listed in Table 1. It is clear that the convection zone mass is a strong function of stellar mass in the range considered. Stars with slightly lower mass will be fully convective, while significantly more massive stars will not have con-

vective envelopes. The convection zone mass varies from 36 % to 1 % of the stellar mass, for the 0.5 and 1.1  $M_{\odot}$  stars, respectively (the solar value is approximately 3 %). The “X” symbols indicate the simulation domain boundaries, expressed in mass coordinates, for the 4 stars simulated (discussed below).

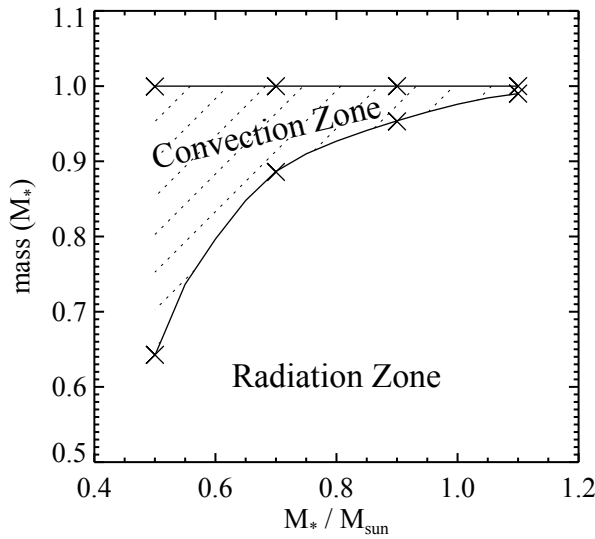
The last two columns of Table 1 show the temperature and the mass density at the base of the convection zone for each case. Although it is true that the temperature and density increases with mass at the stellar center ( $R = 0$ ), these quantities decrease with increasing mass at the location of  $R_{\text{cz}}$ . In other words, for increasing stellar mass, the convection zone generally occupies a more tenuous and cooler outer layer of the star.

## 2.2 Initial and boundary conditions for 3D simulations

We use the 1D stellar structure models described above for the spherically symmetric, initial conditions of the the 3D

**Table 2** Simulation parameters for each case. The number of radial, latitudinal, and longitudinal gridpoints are  $N_r$ ,  $N_\theta$ , and  $N_\phi$ . The outermost radius of the simulated spherical shell is  $R_{\text{out}}$ , and  $H_\rho(R_{\text{out}})$  is the density scale height there. The radial size of the domain is  $L = R_{\text{out}} - R_{\text{cz}}$ . The viscosity at  $R_{\text{out}}$  is  $\nu_{\text{top}}$  and it varies in the domain with the inverse square root of the background density. All stars have a Prandtl number  $P_r \equiv \nu/\kappa = 0.25$  and rotate at the solar rate,  $\Omega_0 = 2.6 \times 10^{-6} \text{ rad s}^{-1}$ , corresponding to a rotation period of  $2\pi/\Omega_0 \approx 28$  days. Also listed are the Rayleigh number  $R_a \equiv (-\partial\rho/\partial S)\Delta S g L^3/(\rho\nu\kappa)$ , the Taylor number  $T_a \equiv 4\Omega^2 L^4/\nu^2$ , and the convective Rossby number  $R_{\text{oc}} \equiv (R_a/T_a P_r)^{1/2}$ , all evaluated at the midlevel of the domain.

Mass ( $M_\odot$ )	$N_r, N_\theta, N_\phi$	$R_{\text{out}}$ ( $R_\odot, R_*$ )	$H_\rho(R_{\text{out}})$ (Mm)	$L$ (Mm)	$\nu_{\text{top}}$ ( $\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$ )	$R_a$	$T_a$	$R_{\text{oc}}$
0.5	257, 256, 512	0.43, 0.97	6.1	120	$3.5 \times 10^{11}$	$3.9 \times 10^6$	$1.5 \times 10^8$	0.32
0.7	257, 256, 512	0.63, 0.97	6.3	140	$2.0 \times 10^{12}$	$6.0 \times 10^5$	$8.1 \times 10^6$	0.54
0.9	257, 256, 512	0.83, 0.98	7.6	170	$5.0 \times 10^{12}$	$1.9 \times 10^5$	$2.6 \times 10^6$	0.54
1.1	257, 256, 512	1.20, 0.98	8.6	200	$2.0 \times 10^{13}$	$3.6 \times 10^4$	$3.2 \times 10^5$	0.67



**Fig. 3** Mass contained beneath the stellar surface (upper line) and location of the base of the convection zone (lower line) as a function of stellar mass, as computed by the CESAM stellar evolution code. The convection zone exists between these two lines, while a convectively stable radiation zone lies below. The “X” symbols indicate the upper and lower radial boundaries of the computational domain used in our ASH simulations, for the 4 cases considered.

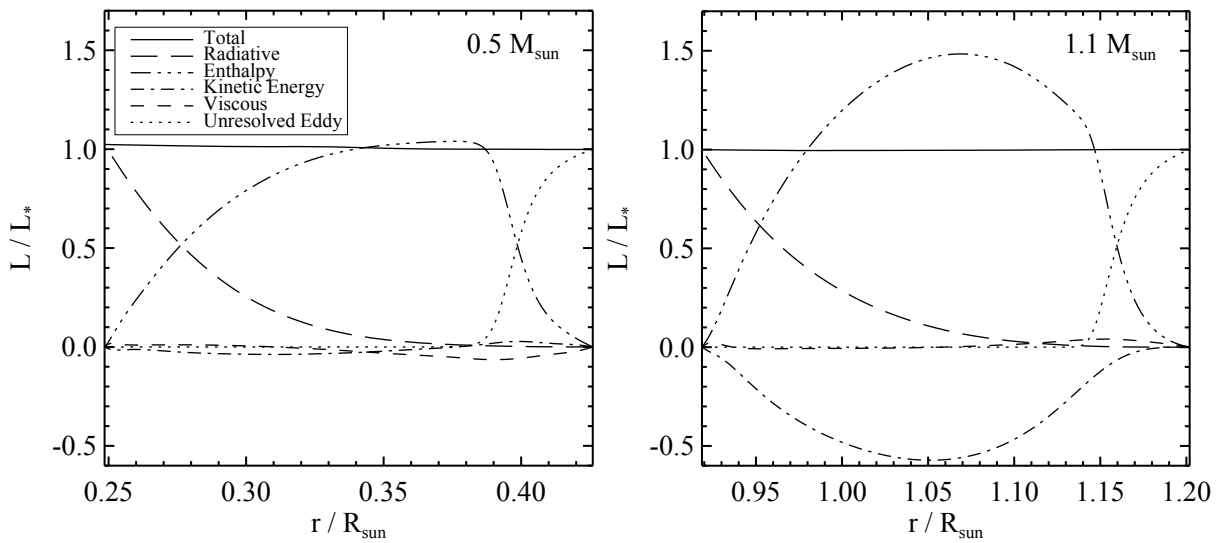
ASH models. Table 2 lists the key properties of each of the 4 simulations. In the ASH models presented here, the domain consists of the stellar convection zone only. Thus, the lower radial boundary of our simulated spherical shells coincides with the base of the convection zone,  $R_{\text{cz}}$ , for each star (see Table 1 and the lower row of “X” symbols in Figs. 2 and 3). We chose the location of the outer boundary such that the mass density there is a factor of 100 smaller than at the base of the convection zone. This places the outer boundary somewhat below the photosphere of the star. The location of the outer boundary  $R_{\text{out}}$  is listed in Table 2 and shown as the upper row of “X” symbols in and Figs. 2 and 3.

In each of our 4 cases, the gravity ( $g$ ) is taken directly from the corresponding CESAM model, and the entropy gradient ( $\partial\bar{S}/\partial r$ ) is initialized with a constant value equal

the (superadiabatic) entropy gradient in the middle of the convection zone in the CESAM model. The background thermodynamic variables ( $\bar{\rho}$ ,  $\bar{P}$ ,  $\bar{T}$ , and  $\bar{S}$ ) are set according to this entropy gradient and to be in hydrostatic balance with the stellar gravity, while the fluctuating thermodynamic variables ( $\rho$ ,  $P$ ,  $T$ , and  $S$ ) are initially zero. The initial entropy gradient and choice of diffusivities (see below) ensures that the initial state is convectively unstable and has a Rayleigh number near or above the critical Rayleigh number necessary for convection. The velocity in the rotating frame ( $\mathbf{v}$ ) is given an initial random perturbation, with negligible kinetic energy, in order to initiate convective motions.

For both the inner and outer boundaries, we use stress-free and impenetrable boundary conditions on the velocity and hold the entropy gradient fixed at the initial value. The radiative diffusivity  $\kappa_r$  is chosen so that the ASH model has the same radiative flux at all radii as the corresponding CESAM model. The initial stellar structure and boundary conditions ensure that the energy flux into the domain at the bottom of the convection zone (given entirely by the radiative flux) is constant in time. At the top of the domain, the density scale height becomes small (see Table 2), and since this approximately determines the convection cell size scale, it becomes numerically challenging to resolve the convective motions there. Furthermore, the impenetrable boundary condition precludes any convective enthalpy flux from escaping the top of the domain. To address both of these issues we introduce a diffusive energy flux (the term proportional to  $\kappa_0$  in Eq. 3) that is assumed to represent an unresolved and spherically symmetric enthalpy flux carried by small-scale convection near the top of the domain (hereafter “unresolved eddy flux”). In all 4 cases, we chose  $\kappa_0$  so that this flux is negligible in the bulk of the convection zone, but increases as a smooth function near the outer boundary, such that the flux leaving the domain equals the stellar energy flux and is constant in time.

In each case, we chose the viscosity at the outer part of the domain,  $\nu_{\text{top}}$ , in order to ensure that the resulting convective turbulence has a significant Reynolds number. As shown in Sect. 3, a higher stellar luminosity leads to larger convective velocities, and thus a larger viscosity is needed to keep the Reynolds numbers comparable (explain-



**Fig. 4** Energy flow in  $0.5$  (left) and  $1.1 M_{\odot}$  (right) cases as a function of radius in the computational domain. Shown are the spherically- and time-averaged luminosities, after the simulations have reached a statistical steady-state.

ing the trend of  $\nu_{\text{top}}$  apparent in Table 2). Within the domain, the viscosity in each case depends only upon radius, and it varies as the inverse square root of the background density. Scaling the viscosity in this way ensures a significant turbulence level at all radii and is used in most previous ASH models in the literature. The thermal diffusivity  $\kappa$  equals  $4\nu$  everywhere in the domain, giving a constant Prandtl number of 0.25 for all cases. The rotation rate of the reference frame ( $\Omega_0$ ), which equals the rotation rate of the star, is set to the solar rate for all 4 stars.

The Rayleigh numbers (calculated using the steady-state value of the entropy in the simulations), Taylor numbers, and convective Rossby numbers for each case are also given in Table 2. The Rayleigh and Taylor numbers, show a strong decrease with increasing stellar mass, which is primarily explained by the trend in the diffusivities. If the diffusivities were constant, these numbers would increase with mass for these stars. The convective Rossby number generally increases with mass, meaning that for the same rotation rate, the coriolis force has less influence on the dynamics.

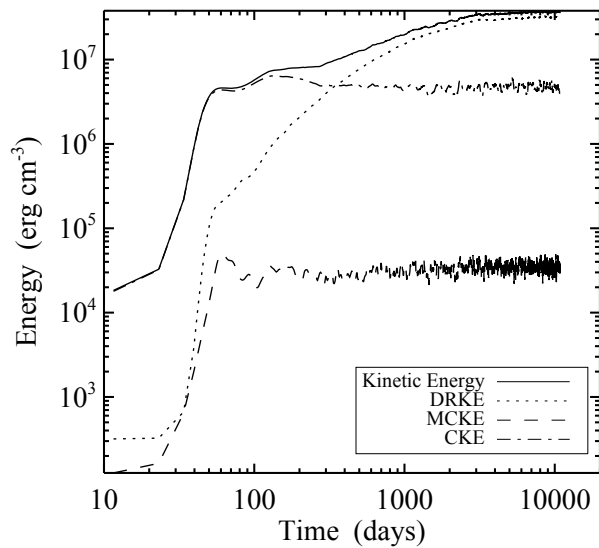
### 2.3 Reaching a statistical steady-state and energy flux balance

At the start of the simulation, the star is in a quiescent state. Thus, there is no significant enthalpy flux, and the system is not initially in radial energy flux balance. In this situation, the evolution of the system, according to Eqs. (1)–(3), ensures that the entropy gradient evolves toward an energy flux balanced state. Furthermore, since the gas in the computational domain is unstably stratified ( $\partial\bar{S}/\partial r < 0$ ), with a large Rayleigh number (see Table 2), significant convective motions begin rapidly after the start of the simulations. Once vigorous convection begins, an energy flux balance is achieved within a few convective turnover times (months,

typically) and maintained for the duration of the simulations. In this state, the net energy transport across the domain is constant at all radii, when averaged over several convective turnover times.

Figure 4 shows the spherically- and time-averaged luminosity, as a function of radius in the whole domain, for the highest and lowest mass stars in this study. These are shown after the simulated stars have evolved for several years from the initial state. The boundary conditions ensure a fixed radiative energy flux into the domain at the inner boundary and a fixed unresolved eddy flux out of the domain at the outer boundary, both with luminosities equal to that of the modeled stellar luminosity. Within the domain, the radiative energy flux is nonzero, but it decreases in importance with increasing radius in the convection zone. The enthalpy flux, associated with convective motions, carries the bulk of the remaining energy flux from the lower boundary, across the convection zone, to the outer boundary.

Due to the asymmetry between broad, slow upflows and narrow, fast downflows, there is generally a net negative (downward) flux of kinetic energy in the convection zone (e.g., as in the right panel of Fig. 4; Cattaneo et al. 1991; Hurlburt et al. 1986). As a result, the steady-state enthalpy luminosity (dash-triple-dotted line) peaks at a value significantly larger than  $L_*$ , in order that the net energy flow across the convection zone is constant and equal to the stellar luminosity. As demonstrated by the two extreme cases in Fig. 4, the presence of a super-luminal enthalpy flux is increasingly important with mass, in our 4 simulations. It is not clear whether this is due to an intrinsic property of the stars (such as the luminosity), or whether it only depends upon, e.g., the viscosity, which is systematically different in each of our cases (Table 2). However, it does seem that the faster flows found in the more massive stars (discussed below) yields a larger negative kinetic energy flux, since the difference be-



**Fig. 5** Integrated kinetic energies in the domain, divided by the total volume, as a function of time, for the  $0.5 M_{\odot}$  case. Shown are the kinetic energies associated with the differential rotation (DRKE), meridional circulation (MCKE), convective motions (CKE), and the total (solid line).

tween the broad-slow upflows and narrow-fast downflows is accentuated.

Although the energy flux balance is established relatively rapidly in the convection zone, the statistical properties of the turbulence can take longer to settle down, as they evolve in response to, e.g., Reynolds stresses and the dissipation of energy on small scales. In addition, these systems typically exhibit global, axisymmetric flows such as differential rotation and meridional circulation. These flows are also influenced by the Reynolds stresses, and the meridional circulation typically has velocities smaller than the convective velocities. Thus, the global flows settle down on timescales of the order of 10 times the convective turnover time. In order to ensure the simulations have time to establish these global flows and are near their turbulent statistical steady-state, we have run each model for a timescale comparable to the global viscous dissipation timescale ( $L^2/\nu$ ).

As an example, Fig. 5 shows the globally integrated kinetic energies in the  $0.5 M_{\odot}$  case, as a function of time from the start of the simulation. The evolution during the first year is characterized by an initially linear (exponential) growth of the convective instability, followed by a non-linear saturation phase, then by relaxation oscillations until it settles down into a statistically steady state. The longer term evolution exhibits a growth in the differential rotation, which also reaches a steady state. It is clear from Fig. 5 that there is little change during the last 5000 days of evolution. The results in Fig. 4 and presented below are shown during this mature state of the systems.

### 3 3D simulations

The ending time of each of the 4 simulations ( $t_f$ ) is listed in Table 3. In this section, we present the convective properties and the global flows existing in each case.

#### 3.1 Properties of convection

Figure 6 shows the radial velocity on slices of constant radius at slightly below the top of the domain and at the middle of the domain, for the  $0.5$  (top),  $0.7$  (middle), and  $1.1 M_{\odot}$  (bottom) cases. Also shown are the slices of temperature at the middle of the domain (right panels). The temperature slices generally appear less structured than the radial velocity slices because the Prandtl number is less than unity ( $0.25$ ), so that the thermal diffusivity ( $\kappa$ ) is larger than the kinematic viscosity ( $\nu$ ).

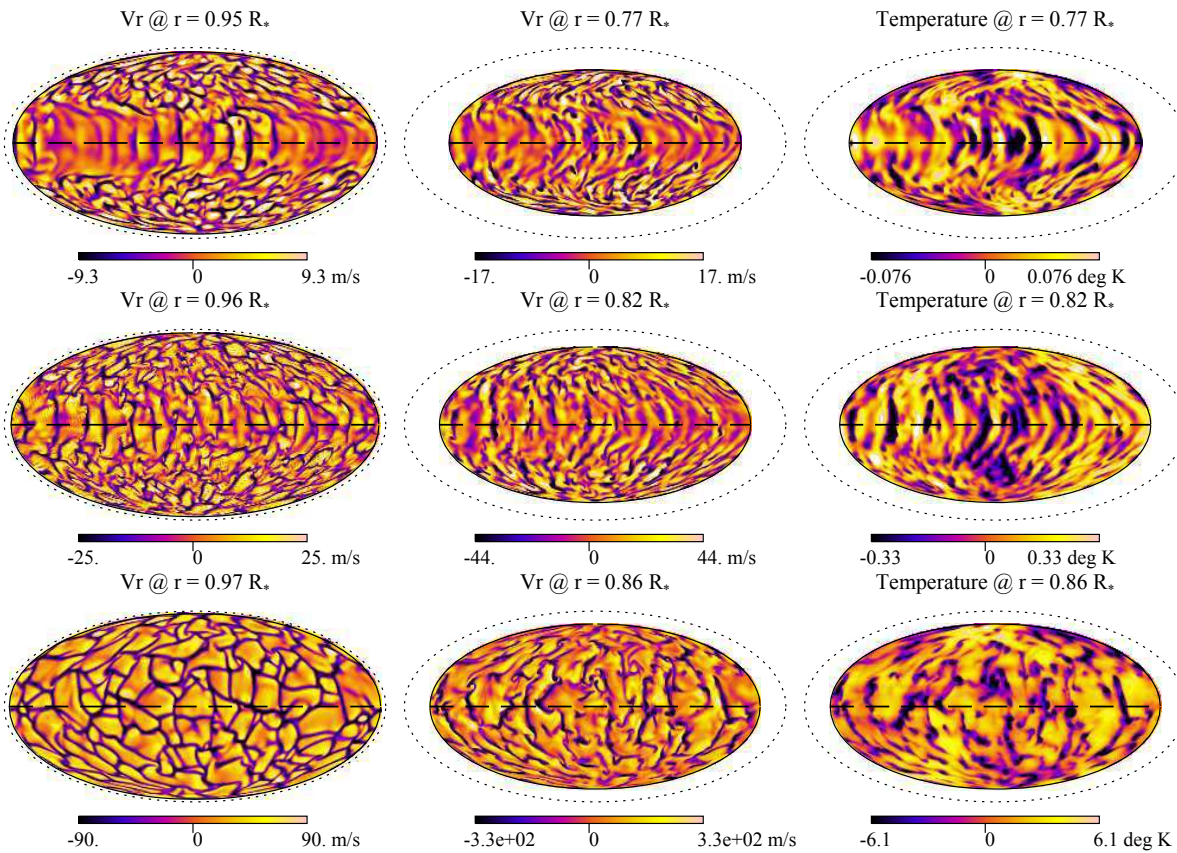
The convective patterns and characteristic eddy sizes are influenced strongly by the density scale height, as well as by the contrast between horizontal and vertical velocity (see, e.g., Bessolaz & Brun 2011). Near the surface, where the density scale height is smallest, the shell slices exhibit typical convective patterns characterized by hot, broad/patchy upflows surrounded by cool, narrow downflow lanes (e.g., Cattaneo et al. 1991; Miesch et al. 2008). Deeper in the convection zone, the downflow lanes often merge and generally lose their connectivity with respect to the surface patterns, and the convection has a less patchy appearance. The near-surface shell slices (left panels of Fig. 6) are shown at a location where the unresolved eddy flux dominates the other fluxes (see Fig. 4). The unresolved eddy flux is a spherically symmetric quantity, and it does not affect the shape of the convective patterns, but it does influence the level of (resolved) turbulence, since the unresolved eddy flux reduces the convective driving. However, at the location of the near-surface shell slices shown, all cases are still turbulent, with a significant convective (enthalpy) flux and Reynolds numbers in the range of 10–30.

In all of our cases, the convective patterns evolve on typical timescales of a few weeks to a few months, with cells merging, splitting, and disappearing. The evolution of the convective motions in the  $1.1 M_{\odot}$  case generally evolve on timescales of a factor of a few times shorter than in the  $0.5 M_{\odot}$  case. The convective patterns are partly advected by the local shear and, depending on whether the flow is prograde of retrograde, are tilted to the right or the left near the equator. At higher latitude, beyond the tangent cylinder (an imaginary circle crossing the upper surface with a cylindrical radius of  $R_{cz}$ ), the convective cells are less aligned with the rotation axis and exhibit a more patchy behavior.

As evident in the figure, the  $0.5 M_{\odot}$  case exhibits convective patterns near the equatorial region that are inhomogeneous, consisting of vigorous convection over some range of longitudes and relatively quiescent regions at other longitudes. Such “active nest” convective patterns have been discussed by Ballot et al. (2007) and Brown et al. (2008) and are likely related to our choice of low Prandtl number.

**Table 3** Simulation results for each case. The amount of evolution time since the start of the simulation is denoted  $t_f$ . Temporal averages of the rms components of velocity  $\tilde{v}_r$ ,  $\tilde{v}_\phi$ ,  $\tilde{v}_\theta$ , speed  $\tilde{v}$ , and fluctuating velocities  $\tilde{v}'_\phi$  and  $\tilde{v}'$  are evaluated at the midlevel of the domain and given in units of  $\text{m s}^{-1}$ . The temporally averaged rms temperature fluctuation at midlevel is  $\tilde{T}$ . Also listed are the rms Reynolds number  $\tilde{R}_e \equiv \tilde{v}'L/\nu$ , Rossby number  $\tilde{R}_o \equiv \tilde{v}'/(2\Omega_0 L)$ , and Péclet number  $\tilde{P}_e \equiv \tilde{v}'L/\kappa$ , evaluated at the midlevel, and the convective turnover timescale  $\tau_{\text{to}} \equiv L/\tilde{v}_r$ . The  $\Delta\Omega$  is the difference in angular rotation rate at the outer boundary, between latitudes of  $0^\circ$  and  $60^\circ$ . The  $\Delta T$  is the difference in the temporally and azimuthally averaged temperature at the base of the convection zone ( $R_{\text{cz}}$ ), between latitudes of  $60^\circ$  and  $0^\circ$ . Finally,  $\tilde{v}_{\text{mc}}$  is the rms meridional circulation speed, calculated from temporally and azimuthally averaged poloidal velocity and by taking the rms of all values at a constant midlevel radius.

Mass ( $M_\odot$ )	$t_f$ (yr)	$\tilde{v}_r$ (m/s)	$\tilde{v}_\theta$ (m/s)	$\tilde{v}_\phi$ (m/s)	$\tilde{v}'_\phi$ (m/s)	$\tilde{v}$ (m/s)	$\tilde{v}'$ (m/s)	$\tilde{T}$ (K)	$\tilde{R}_e$	$\tilde{R}_o$	$\tilde{P}_e$	$\tau_{\text{to}}$ (day)	$\Delta\Omega/\Omega_0$ (%)	$\Delta T$ (K)	$\tilde{v}_{\text{mc}}$ (m/s)
0.5	30	8.7	9.8	37	9.3	40	16	0.22	309	0.025	77	164	37	0.61	0.29
0.7	28	20	21	74	21	79	36	0.76	139	0.049	35	82	41	2.2	0.64
0.9	22	47	45	95	50	115	82	1.3	151	0.094	38	41	30	3.6	1.5
1.1	8.6	150	134	242	136	314	241	6.1	133	0.24	33	15	-42	-9.9	22

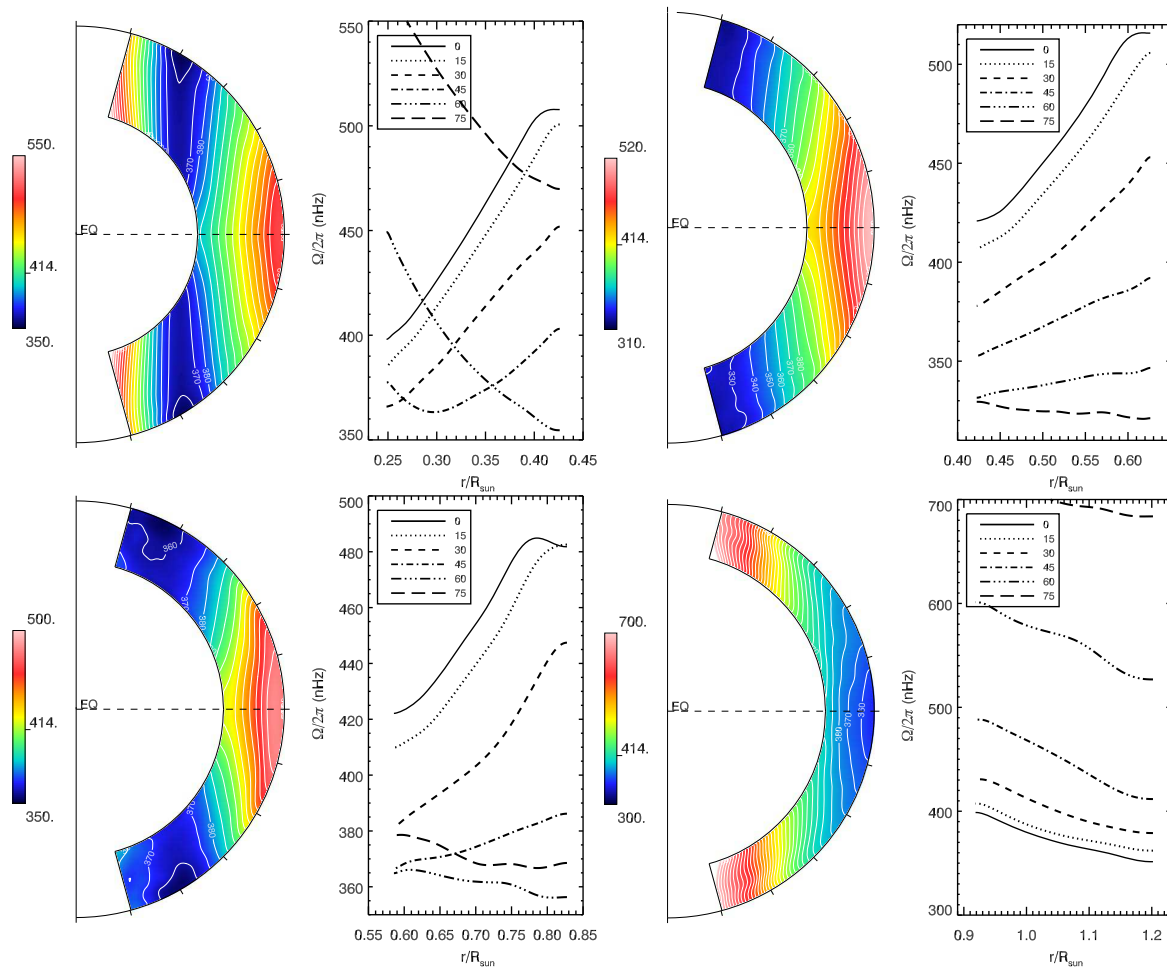


**Fig. 6** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Slices at constant radius (Mollweide view) for the  $0.5 M_\odot$  case (top),  $0.7 M_\odot$  case (middle), and  $1.1 M_\odot$  case (bottom), showing the radial velocity near the surface (left panels) and in the midlevel (middle panels) of the domain and the temperature at midlevel (right panels). In the temperature slices, the azimuthal average has been subtracted, to emphasize the temperature fluctuations. The dotted line corresponds to the stellar surface and the dashed line to the equator.

The remaining 3 cases, exhibit vigorous convection within the entire volume of the convection zone, as seen for the  $0.7$  and  $1.1 M_\odot$  cases shown in the bottom two rows of Fig. 6.

Table 3 lists the rms velocities at the middle of the computational domain for each case. There is a clear trend of increasing convective velocities with increasing stellar mass. As evident in the right panels of Fig. 6 and in the val-

ues of the rms temperature ( $\tilde{T}$ ) listed in Table 3, there is also a strong trend of increasing temperature contrast between up- and downflows, with increasing mass. This trend is steeper if one considers the temperature fluctuation relative to the mean temperature, since the mean background temperature in the  $1.1 M_\odot$  convection zone midlevel is  $\sim 3$  times colder than for the  $0.5 M_\odot$  star (see Sect. 2.1). Fur-



**Fig. 7** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Azimuthally and temporally averaged rotation frequency in a meridional slice through the domain (contour/color plots; rotation axis is vertical) and shown along radial lines at different latitudes (line plots, latitude given in degrees). Shown are the 0.5 (*top left*), 0.7 (*top right*), 0.9 (*bottom left*), and 1.1  $M_{\odot}$  (*bottom right*) cases.

thermore, the average mass density in the convective envelope decreases with increasing stellar mass (the midlevel density in the 1.1  $M_{\odot}$  case is 280 times lower than in the 0.5  $M_{\odot}$  case), which decreases the efficiency of convective energy transport. In spite of the lower density, the convection in higher mass stars is able to carry a larger luminosity than the lower mass stars, due to a combination of larger stellar radii, higher convective velocities, and higher temperature contrasts between up- and downflows.

Table 3 also lists the Reynolds, Rossby, and Péclet numbers for each model. The Reynolds (and Péclet) have a range of a factor of a few, with no trend in mass. These values primarily reflect our choice of  $\nu_{\text{top}}$  for each case (Table 2) rather than any intrinsic property of the stars. For our choices of  $\nu_{\text{top}}$ , the 0.5  $M_{\odot}$  case has the highest Reynolds number. On the other hand, the Rossby numbers do not depend strongly on our choice of diffusivities, and they show a strong dependence on mass, primarily due to the trend in convective velocity with mass, at a constant rotation period. Finally, Table 3 lists a characteristic convective turnover

timescale for each case. This also shows a strong trend with mass, primarily due to the trend in convective velocities.

### 3.2 Differential rotation and meridional circulation

Figure 7 shows the differential rotation in all 4 cases. The 2D plots in the Figure exhibit isorotation contours that are nearly aligned on cylinders in all cases. This behavior is typical for simulations such as these that have no enhanced latitudinal entropy gradient present at the lower boundary of the convection zone (Ballot et al. 2007; Miesch et al. 2006).

The angular rotation rate in the 0.5  $M_{\odot}$  case has a minimum value at mid latitudes, a local maximum in the outer equatorial region, and a global maximum near the pole. A similarly “banded” differential rotation pattern is evident in a number of previously published ASH simulations (e.g. Bessolaz & Brun 2011; Browning 2008). The differential rotation in the 0.7 and 0.9  $M_{\odot}$  cases are the most solar-like, with the fastest angular rotation rate at the equator and slowest at higher latitudes. However, the 1.1  $M_{\odot}$  case exhibits



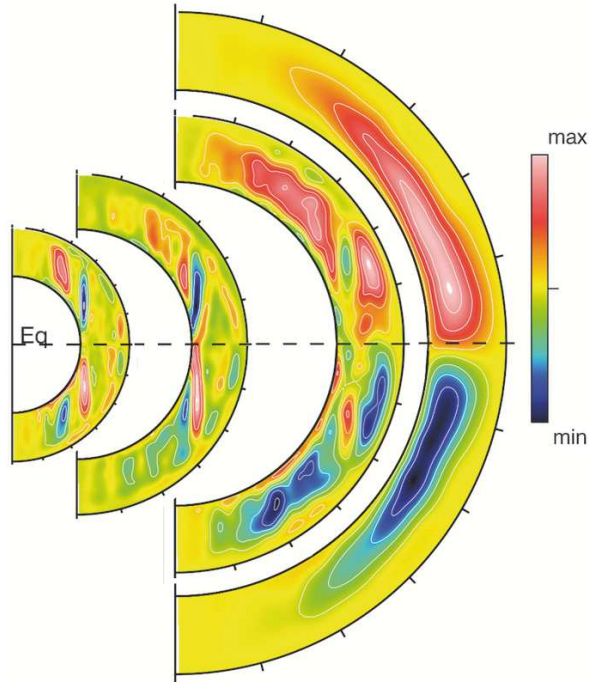
anti-solar rotation, where the slowest angular velocity is at the equator. A reversal of the sense of differential rotation was also observed in the simulations of Bessolaz & Brun (2011) to be an effect of the thickness of the convection zone. In that study, the stellar structure and luminosity was held fixed, while only the thickness of the convection zone was varied. The thickness of the convection zone in our 1.1  $M_{\odot}$  case (as a fraction of  $R_*$ ) is comparable to the models of Bessolaz & Brun (2011) showing anti-solar rotation. This would suggest that the switch from solar to anti-solar may have more to do with convection zone thickness than with stellar structural properties. At the same time, our choice of parameters may also have influenced this outcome. In particular, the 1.1  $M_{\odot}$  case has the largest Rossby numbers (see Tables 2 and 3), which means that the convection is less influenced by rotation than in the other cases.

Each case exhibits a time-averaged, axisymmetric, latitudinal temperature gradient. For the 3 highest mass cases, this is characterized by a monotonic change from equator to pole. The 1.1  $M_{\odot}$  case has a hotter equator, while the 0.7 and 0.9  $M_{\odot}$  cases have hotter poles (as in the Sun). The 0.5  $M_{\odot}$  case has a more complex temperature pattern with a maximum at mid latitudes, while the latitudinal entropy gradient in all cases follows a more monotonic behavior from equator to pole. The second-to-last column of Table 3 shows the temporally and azimuthally averaged temperature difference between the equator and a latitude of  $60^\circ$ , at the base of the convection zone. It is evident that the temperature gradients are steeper for higher mass stars. The more complex temperature structure of the lowest mass case is consistent with the banded differential rotation pattern, and the reversed polarity of the temperature variation in the highest mass case is consistent with anti-solar differential rotation.

The fractional differential rotation of each case, measured at the top of the domain between latitudes 0 and 60 degrees, is listed in the final column of Table 3. These values of  $\Delta\Omega/\Omega_0$  in the Table, show that the magnitude of the differential rotation ranges from 30 to 42 % for all cases.

Figure 8 shows the meridional circulation for all 4 cases. The plots are shown to scale, according to the physical size of each of the stars. For the 2 highest mass stars, the circulation pattern is dominated by a global, unicellular flow pattern from equator to pole near the surface and from pole to equator near the base of the convection zone. However, as evident in the Figure, there is a trend for this flow to break up into a multi-cellular network of circulation patterns roughly aligned on cylinders, for the lower mass stars. The tendency for the meridional flow to breakup in this way for increasing convection zone depth was also seen in the simulations of Bessolaz & Brun (2011), suggesting that this effect is mostly due to the size of the convection zone, rather than with other stellar properties.

The last column of Table 3 shows the characteristic meridional circulation flow speed evaluated at the midlevel of the domain for each case. As with the convective velocities, there is a clear trend of increasing meridional circula-



**Fig. 8** (online colour at: [www.an-journal.org](http://www.an-journal.org)) Contours of the stream function of the meridional flow for the 0.5, 0.7, 0.9, and 1.1  $M_{\odot}$  cases (left to right), where the physical sizes of the stars are shown to scale. The contours follow streamlines in the meridional plane from temporally and azimuthally averaged data. The colors indicate clockwise (blue) and counter-clockwise (red) circulation, and the stellar rotation axis is vertical.

tion flow speed with increasing stellar mass. A similar trend is also seen in 2D models (e.g., Küker & Rüdiger 2008). Since the physical size of the circulating patterns (evident in Fig. 8) also increases strongly with mass, this suggests that the characteristic timescale for these circulations is not strongly dependent on stellar mass. The values listed in Table 3 also suggest that the ratio of the meridional circulation speed to the convection speed (e.g.,  $\tilde{v}_{mc}/\tilde{v}$ ) range from 2% for the 3 lowest mass stars to 9% for the 1.1  $M_{\odot}$  case.

## 4 Summary and discussion

We have presented results from 3D dynamical simulations of the convection zones of 4 Sun-like stars, spanning a mass range from 0.5 to 1.1  $M_{\odot}$  and rotating at the solar rate. As presented in Sect. 2.1, these stars cover a range in luminosities of a factor of 40 and have convection zone masses ranging from 18 % to 1.1 % of a solar mass. The physical sizes of the convection zones increase slightly with mass (ranging from 19 % to 31 % of a solar radius), although the fractional size decreases with mass (ranging from 44 % to 24 % of a stellar radius).

We found that the convective velocities and temperature contrast between up- and downflows is a strong function of mass. This is due to the strong luminosity dependence



on mass, coupled with the fact that higher mass stars have less dense convective envelopes and thus require more vigorous convection. As a consequence of the trend in convective velocities, the Rossby number (for a constant  $\Omega_0$ ) increases and the convective turnover time decreases significantly with increasing mass.

The convective pattern in the  $0.5 M_\odot$  case exhibits “active nests” on a finite range of longitudes in the equatorial region. The presence of these active nests appears to be related to both the Rossby and Prandtl numbers, in a sense that they have been seen in simulations with low  $R_o$  number and with  $P_r = 0.25$  (Ballot et al. 2007; Brown et al. 2008) but not in cases with  $P_r = 1.0$  (Ballot et al. 2007; Bessolaz & Brun 2011). This may be due to the relative amplitude of the local shear, which tends to be stronger for lower  $P_r$ . Stronger shear disrupts convective motions and can locally inhibit radial motions.

The angular rotation rate has a peak value at the surface and equator for the  $0.5$ ,  $0.7$ , and  $0.9 M_\odot$  cases. However, our simulations exhibit a differential rotation that is “banded,” with a minimum at mid latitudes and another maximum at the poles, for the  $0.5 M_\odot$  case. The  $0.7$  and  $0.9 M_\odot$  cases exhibit the most solar-like differential rotation, with a maximum at the equator and minimum near the poles, but the  $1.1 M_\odot$  case exhibits anti-solar differential rotation. The magnitude of the differential rotation is comparable in all cases.

The 4 simulations presented here exhibit isorotation contours that are nearly aligned on cylinders, approximately following the Taylor-Proudman constraint. From simulations of the solar convection zone (e.g., Miesch et al. 2006), we know that the Taylor-Proudman constraint can be broken by a thermal wind driven by very small latitudinal gradients of temperature or entropy, with differences of a few Kelvin sufficing to move cylindrical profiles to radially-aligned rotation profiles. Such gradients and thermal winds do occur in the simulations presented here, but the presence of the domain boundary at the base of the convection zone somewhat inhibits this effect. By moving the lower domain boundary deep into the radiation zone, Brun et al. (2011) demonstrated that the presence of a dynamically self-consistent tachocline alleviates the effects of the lower boundary on the convection zone dynamics and results in a stronger thermal wind, isorotation contours more aligned to the radial direction, and more realistic meridional circulations and convective penetration. In future work, similar models will be developed for the stars in the present study.

The meridional circulation is dominated by a single, global circulation pattern in each hemisphere for the most massive cases, but breaks up into smaller scale patterns, aligned with the cylindrical  $z$ -direction, for lower mass stars.

Future work with these models should explore cases that include, for example, (a) a part of the radiation zone in the computational domain, in order to determine how the presence of a tachocline affects the convection zone properties, (b) the effects of different rotation rates, in particular faster

rotation, to understand how the properties of these stars differ at younger ages, and (c) magnetic fields, in order to address the magnetic dynamo properties of these stars.

**Acknowledgements.** SPM, ODC, and ASB were supported by the ERC through grant 207430 STARS2. BPB is supported in part by NSF Astronomy and Astrophysics postdoctoral fellowship AST 09-02004. CMSO is supported by NSF grant PHY 08-21899.

## References

- Baliunas, S.L., Donahue, R.A., Soon, W.H., et al.: 1995, *ApJ* 438, 269
- Ballot, J., Brun, A.S., Turck-Chièze, S.: 2007, *ApJ* 669, 1190
- Barnes, J.R., Cameron, A.C., Donati, J.-F., James, D.J., Marsden, S.C., Petit, P.: 2005, *MNRAS* 357, L1
- Bessolaz, N., Brun, A.S.: 2011, *ApJ* 728, 115
- Brown, B.P.: 2009, PhD Thesis, University of Colorado at Boulder
- Brown, B.P., Browning, M.K., Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2008, *ApJ* 689, 1354
- Brown, B.P., Miesch, M.S., Browning, M.K., Brun, A.S., Toomre, J.: 2011, *ApJ* 731, 69
- Browning, M.K.: 2008, *ApJ* 676, 1262
- Browning, M.K., Brun, A.S., Toomre, J.: 2004a, in: J. Zverko, J. Ziznovsky, S.J. Adelman, W.W. Weiss (eds.), *The A-Star Puzzle*, IAU Symp. 224, p. 149
- Browning, M.K., Brun, A.S., Toomre, J.: 2004b, *ApJ* 601, 512
- Browning, M.K., Miesch, M.S., Brun, A.S., Toomre, J.: 2006, *ApJ* 648, L157
- Brun, A.S., Palacios, A.: 2009, *ApJ* 702, 1078
- Brun, A.S., Toomre, J.: 2002, *ApJ* 570, 865
- Brun, A.S., Miesch, M.S., Toomre, J.: 2004, *ApJ* 614, 1073
- Brun, A.S., Miesch, M., Toomre, J.: 2011, *ApJ*, in press
- Cattaneo, F., Brummell, N.H., Toomre, J., Malagoli, A., Hurlburt, N.E.: 1991, *ApJ* 370, 282
- Clune, T.L., Elliott, J.R., Glatzmaier, G.L., Miesch, M.S., Toomre, J.: 1999, *Parallel Comput.* 25, 361
- DeRosa, M., Gilman, P.A., Toomre, J.: 2002, *ApJ* 581, 1356
- Donahue, R.A., Saar, S.H., Baliunas, S.L.: 1996, *ApJ* 466, 384
- Donati, J.-F., Cameron, A.C., Petit, P.: 2003, *MNRAS* 345, 1187
- Featherstone, N.A., Browning, M.K., Brun, A.S., Toomre, J.: 2009, *ApJ* 705, 1000
- Hurlburt, N.E., Toomre, J., Massaguer, J.M.: 1986, *ApJ* 311, 563
- Küker, M., Rüdiger, G.: 2008, *Journal of Physics: Conference Series* 118, 012029
- Lovis, C., Dumusque, X., Santos, N.C., et al.: 2011, *astro-ph/1107.5325*
- Miesch, M.S., Brun, A.S., Toomre, J.: 2006, *ApJ* 641, 618
- Miesch, M.S., Brun, A.S., Rosa, M.L.D., Toomre, J.: 2008, *ApJ* 673, 557
- Morel, P.: 1997, *A&AS* 124, 597
- Oláh, K., Kolláth, Z., Granzer, T., et al.: 2009, *A&A* 501, 703
- Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S.K., et al.: 2008, *MNRAS* 388, 80
- Pizzolato, N., Maggio, A., Micela, G., Sciortino, S., Ventura, P.: 2003, *A&A* 397, 147
- Saar, S.H., Brandenburg, A.: 1999, *ApJ* 524, 295
- Strassmeier, K.G., Fekel, F.C., Bopp, B.W., Dempsey, R.C., Henry, G.W.: 1990, *ApJS* 72, 191
- Verner, G.A., Elsworth, Y., Chaplin, W.J., et al.: 2011, *MNRAS* 415, 3539
- Wright, N.J., Drake, J.J., Mamajek, E.E., Henry, G.W.: 2011, *astro-ph/1109.4634*



---

 Du rôle d'une zone radiative sur la dynamique de l'enveloppe convective
 

---

## Contents

<b>6.1</b>	<b>Importance de la zone stable et de la rotation</b>	<b>192</b>
<b>6.2</b>	<b>Description du modèle</b>	<b>193</b>
6.2.1	Description générale	193
6.2.2	Viscosité et diffusivité	195
6.2.3	Propriétés générales	197
<b>6.3</b>	<b>Dynamique de la zone convective</b>	<b>201</b>
<b>6.4</b>	<b>Écoulements à grande échelle</b>	<b>206</b>
6.4.1	Rotation différentielle	206
6.4.2	Circulation méridienne	208
6.4.3	Lois d'échelles en fonction de la masse et du taux de rotation	210
<b>6.5</b>	<b>Maintien des écoulements moyens</b>	<b>214</b>
6.5.1	Transport de moment cinétique	214
6.5.2	Balance de vent thermique	217
<b>6.6</b>	<b>Pénétration des plumes convectives</b>	<b>219</b>
<b>6.7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>221</b>

---

Alors que les simulations présentées dans le chapitre précédent ne prenaient en compte que la zone convective, nous décidons, dans ce chapitre, d'étendre cette étude en 2 étapes. Tout d'abord, nous incluons désormais une partie de la zone radiative, ce qui va nous permettre d'étudier le couplage thermique et dynamique entre ces deux zones. Nous verrons comment la prise en compte de cette interface nous permet d'étudier des phénomènes nouveaux comme l'établissement naturel d'une tachocline ou la pénétration convective. Puis, dans une seconde étape, et pour chaque masse d'étoile, nous faisons varier le taux de rotation à 1, 3 et 5  $\Omega_{\odot}$ . Cette dernière influence largement la convection, la redistribution du moment cinétique et la balance de vent thermique, ce qui va agir en conséquence sur les écoulements à grande échelle. Grâce à ces avancées, et pour les masses considérées, ces simulations représentent les modèles les plus réalistes à ce jour des intérieurs stellaires.

## 6.1 Importance de la zone stable et de la rotation

Dans le Chapitre 5, nous avons étudié les propriétés hydrodynamiques de la zone convective des étoiles de type solaire avec une masse allant de 0.5 à 1.1  $M_{\odot}$ . Dans ce chapitre, nous augmentons le réa-

lisme de ces simulations numériques 3D en incorporant une large fraction de la zone radiative. Comme nous l'avons vu, l'enveloppe convective soumise à une rotation différentielle est hautement turbulente et évolue sur des temps de l'ordre de la minute à la semaine. Au contraire, dans le Soleil, la zone radiative évolue sur des temps de Kelvin Helmholtz  $\tau_{KH} \sim 10^7$  ans et exhibe une rotation solide. Déterminer s'il en est de même dans les autres étoiles reste encore aujourd'hui un défi. La transition entre les deux régimes de rotation, appelée la tachocline (Spiegel and Zahn, 1992), se fait sur une épaisseur très faible ( $\sim 0.05R_{\odot}$ ). Bien que leur dynamique soit singulièrement différente, ces deux régions sont couplées de façon hydrodynamique et thermique (mais aussi magnétique) par des interactions non linéaires. On suspecte alors que la tachocline joue un rôle important d'une part dans la génération de champ magnétique (cf Chapitre 2), mais aussi d'autre part dans l'établissement de la rotation différentielle (Miesch et al., 2006). Inclure la zone radiative dans les simulations numériques implique également de prendre en compte une très grande variété de processus physiques : la pénétration des cellules convectives dans la zone radiative, la stratification, l'excitation et propagation des ondes internes et les instabilités hydrodynamiques (Brun et al., 2011) (mais aussi tous les phénomènes magnétiques que l'on décrira dans le Chapitre 7).

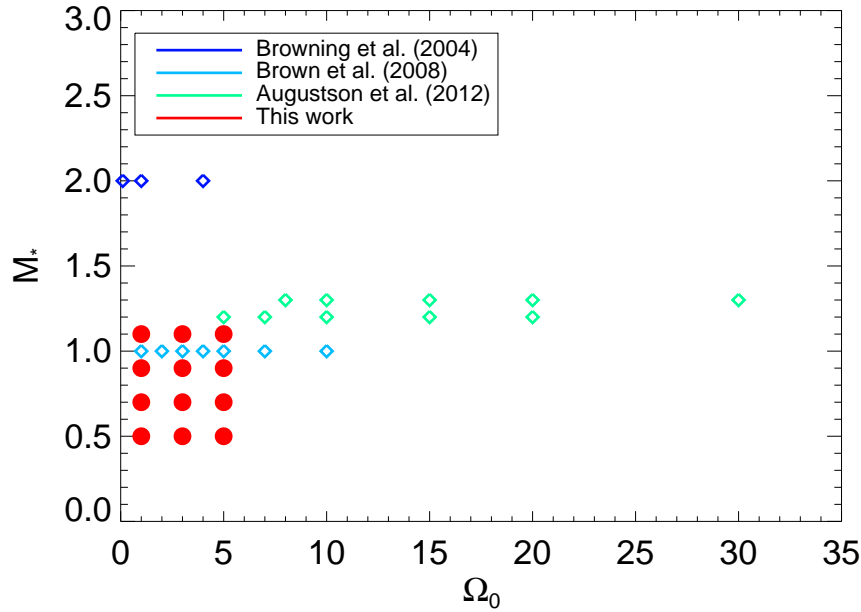
Prendre en compte la zone stable et la tachocline est également important au regard de l'évolution à long terme de l'évolution stellaire. En effet, la convection turbulente génère à la fois des courants ascendants et descendants. Parmi ces plumes, certaines vont pénétrer jusqu'à la base de la zone convective où l'on passe d'une stratification superadiabatique à subadiabatique. Elles ne vont alors pas simplement s'arrêter à cet endroit précis, mais pénétrer dans la zone radiative à cause de leur inertie, puis ralentir par la force de flottaison sur une très courte distance avant d'être dissipées par la diffusion thermique (phénomène que l'on appelle l'*overshoot*). Dans les étoiles de type solaire, ce processus permettrait d'expliquer la dépletion du lithium observé à la surface (Straus et al., 1976; Blöcker et al., 1998; Schlattl and Weiss, 1999; Xiong and Deng, 2009). La distance sur laquelle se produit cette pénétration dépend à la fois de la stratification de la zone stable mais aussi du nombre de Péclet  $P_e$  (cf Table A.2) associé aux plumes (Zahn, 1991; Brummell et al., 2002; Rempel, 2004). Lorsque  $P_e \ll 1$ , le mélange est peu efficace et ne perturbe presque pas la stratification de la zone stable. Au contraire, lorsque  $P_e \gg 1$  comme c'est le cas dans le Soleil, la pénétration est très efficace et mène à un mélange efficace de la zone d'*overshoot*. On parle alors de pénétration convective. Enfin, le couplage de ces deux zones permettra d'avoir une meilleure compréhension du transport de moment cinétique, crucial pour déterminer l'évolution du profil de rotation interne (Denissenkov et al., 2010; Spada et al., 2010). À terme, cela nous permettra de comprendre comment la rotation d'une étoile évolue au cours du temps de sa formation à sa phase post-séquence principale (Charbonneau and MacGregor, 1993; Palacios et al., 2006; Bouvier, 2008). En particulier, le temps typique d'interaction entre le cœur et l'enveloppe a une influence directe sur l'évolution de la rotation des étoiles (Keppens et al., 1995; Irwin et al., 2008; Denissenkov et al., 2010). Il est donc nécessaire de mieux caractériser ce couplage et la manière selon laquelle il se déploie, notamment selon des processus impliquant la viscosité, les ondes et le champ magnétique (Gilman et al., 1989). Actuellement, Pinsonneault (1997) et Denissenkov et al. (2010) estiment que ce temps est compris entre 1 Myr pour les étoiles en rotation rapide et 100 Myr pour celles en rotation lente.

L'impact continu produit par ces plumes internes sur la partie supérieure de la zone radiative excite directement des ondes internes (Hurlburt et al., 1986; Goldreich and Kumar, 1990; Garcia Lopez and Spruit, 1991; Zahn et al., 1997; Kiraga et al., 2003; Browning et al., 2004; Rogers and Glatzmaier, 2005). Les ondes produites sont de type gravité lorsque la rotation est négligeable ou gravito-inertielle dans le cas contraire (Mathis et al., 2008). Comprendre comment ces ondes sont générées, comment elles se propagent et transportent le moment cinétique est crucial car elles entretiennent la rotation solide et participent au ralentissement à long terme de la zone radiative (Charbonnel and Talon, 2005; Rogers and Glatzmaier, 2006; Belkacem et al., 2009; Brun et al., 2011; Alvan et al., 2013).

Jusqu'à récemment, les modèles théoriques ont considéré chaque processus décrit précédemment de manière indépendante. Les modèles numériques considérant à la fois les zones radiative et convective

étaient alors restreints à une ou deux dimensions (e.g. [Pinsonneault, 1997](#); [Denissenkov et al., 2010](#); [Rudiger and Kitchatinov, 1997](#); [Spada et al., 2010](#)). La difficulté est de prendre en compte la large gamme d’échelles spatiales et temporelles des nombreux processus physiques. Mais depuis les récents développements des supercalculateurs, des simulations en 3D de plus en plus réalistes ont émergé incluant de manière cohérente le couplage entre les deux zones et tous les processus non linéaires avec des degrés de turbulence et magnétisme variés ([Glatzmaier, 1985b](#); [Miesch et al., 2000](#); [Browning et al., 2006](#)). [Brun et al. \(2011\)](#) ont réalisé une nouvelle série de modèles prenant en compte la quasi-totalité du Soleil, une stratification réaliste, l’établissement auto-cohérent d’une tachocline et les effets thermiques. Nos modèles se placent dans la continuité de ces derniers travaux.

D’autre part dans ce chapitre, nous souhaitons savoir quelles sont les effets du taux de rotation sur la dynamique interne. Il semble en effet que la rotation soit un des paramètres clés de la dynamique interne et de la génération de champ magnétique (cf Section 1.5). Afin de mieux comprendre ses effets, de nombreuses simulations numériques ont été menées sur la rotation, soit dans des portions d’étoiles ([Käpylä et al., 2011a](#)), soit dans leur globalité dans des conditions thermodynamiques et structurales variées : dans des étoiles analogues au Soleil ([Brown et al., 2008](#)), de type F ([Augustson et al., 2012](#)) et de type A ([Browning et al., 2004](#)). Le travail présenté dans ce chapitre s’inscrit dans cet effort commun de comprendre comment la rotation influence la dynamique interne des étoiles, et ici plus particulièrement dans les étoiles de type G et K.



**FIGURE 6.1** – Espace couvert par les simulations numériques 3D de [Browning et al. \(2004\)](#), [Brown et al. \(2008\)](#), [Augustson et al. \(2012\)](#) (en losanges) et de ce travail (en ronds pleins) dans un diagramme Masse-Rotation en unité de  $M_{\odot}$  et  $\Omega_{\odot}$  respectivement.

## 6.2 Description du modèle

### 6.2.1 Description générale

Nous présentons dans cette section la manière dont les modèles ont été réalisés. On modélise les mêmes étoiles que dans le Chapitre 5, i.e.  $M_* = \{0.5, 0.7, 0.9, 1.1\} M_{\odot}$ , mais cette fois en prenant en compte une large fraction de la zone radiative. De plus, on considérera pour chaque masse  $M_*$ , 3 taux de rotation différents  $\Omega_0 = \{1, 3, 5\} \Omega_{\odot}$ , nous amenant à un total de 12 simulations, chacune d’elle

représentant un temps de calcul d'environ 1 million d'heures.

Le domaine de résolution s'étend radialement de  $R_{\text{in}}$  à  $R_{\text{top}}$  (cf Table 6.1). Le bord externe  $R_{\text{top}}$  du domaine a été choisi de telle sorte que l'échelle de hauteur de densité soit égale à  $H_\rho = 10$  Mm, ce qui permet de s'assurer que l'échelle de la convection soit comparable dans chaque modèle, tout en évitant d'avoir à résoudre les très petites échelles à la surface. Le bord interne  $R_{\text{in}}$  a été fixé pour que l'épaisseur considérée dans la zone radiative soit égale à l'épaisseur considérée dans la zone convective. La base de la zone convective définie comme le rayon auquel le milieu passe de subadiabatique à superadiabatique (i.e.  $\frac{\partial S}{\partial r}$  change de signe), localisée en  $r = R_{\text{cz}}$  se trouve donc approximativement au milieu de notre domaine<sup>1</sup>. Les autres caractéristiques de ces étoiles (luminosité, rayon, température effective, etc.) peuvent être trouvées dans la Table 5.1. On applique aux bords les mêmes conditions limites (5.19) que dans le Chapitre 5. Toutes les simulations ont été menées avec une résolution  $N_r \times N_\theta \times N_\phi = 719 \times 256 \times 512$ , ce qui nous permet de résoudre les échelles spatiales horizontales jusqu'à  $\ell_{\text{max}} = 170$  (cf Annexe C). Dans ASH, les noeuds dans la direction radiale sont localisés aux points de collocation de Gauss-Lobatto, fournissant une haute résolution aux bords du domaine, mais plus faible au centre. En choisissant  $N_r = 719$ , on s'assure de pouvoir résoudre avec suffisamment de finesse la base de la zone convective, région clé de la dynamique interne. Avec une telle résolution radiale, l'intervalle moyen entre deux points dans la direction radiale est d'environ 1% de l'échelle de pression  $H_p$  locale.

**TABLE 6.1** – Synthèse des domaines de résolution et du nom associé à chaque modèle considéré dans ce Chapitre.

Masse ( $M_\odot$ )	$R_{\text{in}}$ ( $R_*$ )	$R_{\text{top}}$ ( $R_*$ )	$R_{\text{cz}}$ ( $R_*$ )	Nom	Rotation ( $\Omega_\odot$ )
0.5	0.13	0.95	0.56	M05 R1	1
				M05 R3	3
				M05 R5	5
0.7	0.32	0.97	0.66	M07 R1	1
				M07 R3	3
				M07 R5	5
0.9	0.38	0.97	0.69	M09 R1	1
				M09 R3	3
				M09 R5	5
1.1	0.50	0.97	0.75	M11 R1	1
				M11 R3	3
				M11 R5	5

Cette nouvelle génération de modèles s'appuie sur la même formulation que celle décrite dans la Section 5.3. Nous utilisons le code ASH qui résout l'ensemble des équations (6.1) identiques aux équations données dans la Section 5.3.1 mais dans lesquelles on rajoute un terme générateur d'énergie  $\bar{\rho}\epsilon$  due aux réactions de fusion nucléaire car une partie du noyau interne est maintenant incluse dans les simulations.

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (6.1a)$$

1. On s'efforcera de bien distinguer la base de la zone convective (là où le gradient d'entropie change de signe) de la tachocline (région de fort cisaillement de vitesse entre la rotation différentielle de l'enveloppe convective et la rotation solide de la zone radiative).

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}] + \nabla \cdot \bar{\mathcal{D}} - 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v} \quad (6.1b)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{T} \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S) &= \nabla \cdot [\kappa_r \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) + \bar{\rho} \bar{T} (\kappa \nabla S + \kappa_0 \nabla \bar{S})] \\ &+ 2\bar{\rho} \nu [e_{ij} e_{ij} - 1/3 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2] + \bar{\rho} \epsilon \end{aligned} \quad (6.1c)$$

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma \bar{P}} - \frac{S}{c_p} \quad (6.1d)$$

On utilise une représentation simplifiée du taux de réactions nucléaires, en choisissant  $\epsilon = \epsilon_0 T^n$ . Les coefficients  $\epsilon_0$  et  $n$  sont choisis de telle sorte que l'intégrale le long du rayon du terme source de chaleur soit égale à la luminosité de l'étoile  $L_*$  à la base de leur zone convective respective (cf [Table 6.2](#)).

### 6.2.2 Viscosité et diffusivité

Les capacités actuelles des ordinateurs ne permettent pas pour le moment de résoudre toutes les échelles de la turbulence des zones convectives stellaires. Nous utilisons donc des viscosités et diffusivités thermiques effectives supérieures aux valeurs atomiques comme traitement sous mailles (cf [Section 5.2.3](#)), de la même façon que dans le [Chapitre 5](#).

**TABLE 6.2** – Paramètres de génération d'énergie et de viscosité pour chaque étoile. On choisit de définir le temps visqueux par  $\tau_\nu = (R_{\text{top}} - R_{\text{cz}})^2 / \nu(R_{\text{cz}})$ , qui est le rapport entre l'épaisseur de la zone convective et la viscosité à la BCZ. Aucune valeur de  $\epsilon_0$  et  $n$  n'est indiquée pour les étoiles dont la masse est  $M_* > 0.7 M_\odot$  car le domaine de résolution n'inclut pas de zone génératrice d'énergie.

$M_*$ ( $M_\odot$ )	Nom cas	$\epsilon_0$	$n$	$\nu_{\text{top}}$ ( $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ )	$\tau_\nu$ (jours)	$r_t$ (cm)	$\sigma_t$ (cm)
0.5	M05 R1	$2.20 \times 10^{-7}$	7.3	$4.47 \times 10^{11}$	33967	$1.65 \times 10^{10}$	$4.0 \times 10^8$
	M05 R3			$2.58 \times 10^{11}$	58832		
	M05 R5			$2.00 \times 10^{11}$	75952		
0.7	M07 R1	$5.56 \times 10^{-9}$	8.8	$2.91 \times 10^{12}$	8077	$2.67 \times 10^{10}$	$1.0 \times 10^9$
	M07 R3			$1.68 \times 10^{12}$	13990		
	M07 R5			$1.30 \times 10^{12}$	18060		
0.9	M09 R1	—	—	$1.01 \times 10^{13}$	3183	$3.94 \times 10^{10}$	$7.0 \times 10^8$
	M09 R3			$5.81 \times 10^{12}$	5513		
	M09 R5			$4.50 \times 10^{12}$	7117		
1.1	M11 R1	—	—	$3.80 \times 10^{13}$	931	$6.20 \times 10^{10}$	$8.0 \times 10^8$
	M11 R3			$2.20 \times 10^{13}$	1612		
	M11 R5			$1.70 \times 10^{13}$	2082		

Ces simulations diffèrent cependant de celles présentées dans le [Chapitre 5](#) par la présence de la zone radiative sous jacente à l'enveloppe convective. On prend alors en compte la différence de nature (turbulente et non turbulente) entre ces deux zones en choisissant un profil de viscosité dépendant uniquement du rayon et de la forme :

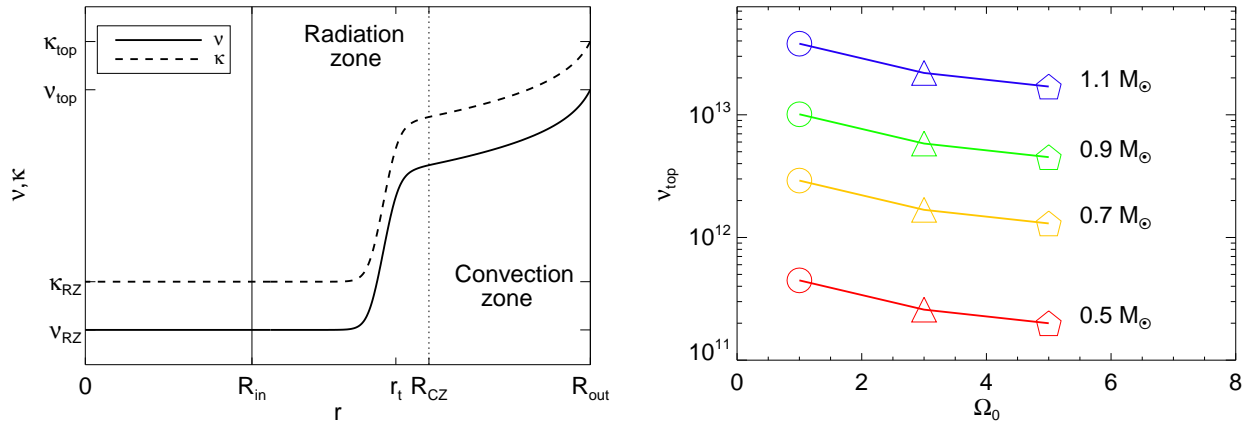


$$\nu(r) = \nu_{\text{RZ}} + \nu_{\text{top}} f(r) \quad (6.2a)$$

$$f(r) = \left( \frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}_{\text{top}}} \right)^\alpha \left[ 1 - \frac{\nu_{\text{RZ}}}{\nu_{\text{top}}} \right] g(r) \quad (6.2b)$$

$$g(r) = \frac{1}{2} \left[ \tanh \left( \frac{(r - r_t)}{\sigma_t} \right) + 1 \right] \quad (6.2c)$$

Avec un tel profil, la diffusivité est maximale en  $r = R_{\text{top}}$  et vaut  $\nu_{\text{top}}$ . Elle décroît monotoniquement comme  $\bar{\rho}^\alpha$  avec  $\alpha = -0.5$  en s'enfonçant dans la zone convective. La diffusivité a donc chuté d'un facteur  $\sqrt{\frac{\bar{\rho}(R_{\text{top}})}{\bar{\rho}(R_{\text{cz}})}}$  entre le haut du domaine et la base de la zone convective et permet d'obtenir un nombre de Reynolds approximativement uniforme dans toute la zone convective. Puis,  $\nu(r)$  devient constant dans la RZ et vaut  $\nu_{\text{RZ}} = 10^{-3}\nu_{\text{top}}$  après une transition rapide (sur une épaisseur de l'ordre de  $\sigma_t$ ) en  $r = r_t \simeq R_{\text{cz}}$ , pour prendre en compte l'absence de turbulence (cf [Figure 6.2](#)). Les paramètres du profil qui dépendent de la masse de l'étoile ( $r_t, \sigma_t$ ) sont donnés dans la [Table 6.2](#) pour tenir compte de la variation de la structure interne d'une masse à l'autre. On utilise le même profil radial pour la diffusivité thermique  $\kappa(r)$ , sauf que la valeur maximale est déterminée par  $\kappa_{\text{top}} = 4\nu_{\text{top}}$ . Autrement dit, le nombre de Prandtl est constant dans tout le domaine de résolution et égal à  $P_r = 0.25$  pour toutes les étoiles considérées.



**FIGURE 6.2** – *A gauche* : Profil radial de viscosité pour un modèle donné. *A droite* : Valeur maximale de la viscosité  $\nu_{\text{top}}$  en fonction du taux de rotation  $\Omega_0$  (en unité du taux de rotation solaire  $\Omega_\odot$ ) pour chaque masse considérée. Le code couleur utilisé est le même que dans la [Figure 5.5](#) et les symboles donnent le taux de rotation : rond, triangle et pentagone sont respectivement 1, 3 et 5  $\Omega_\odot$ .

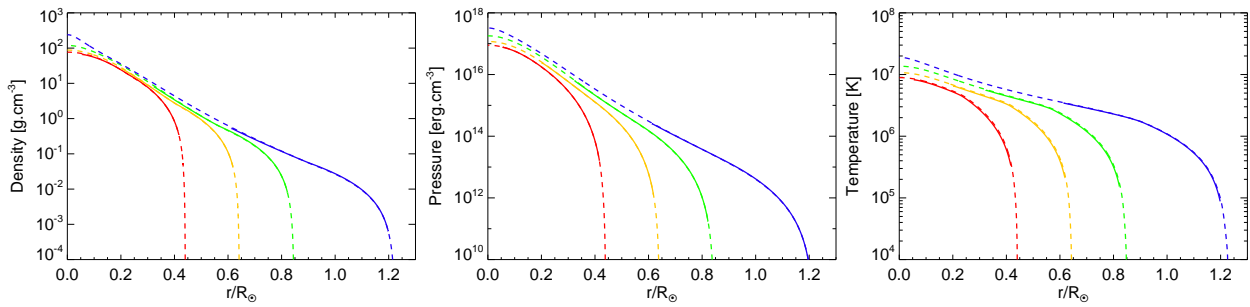
Dans cette étude, on cherche à déterminer s'il existe des relations entre les caractéristiques dynamiques et la masse, mais aussi le taux de rotation. Pour pouvoir comparer ces simulations entre tous les modèles, on cherche à maintenir autant que possible un degré de convection comparable, i.e. dans l'idéal avoir  $R_a/R_{ac}$  constant d'un modèle à l'autre. Or, la rotation a tendance à stabiliser la convection. Autrement dit, lorsque  $\Omega_0$  augmente, le nombre de Rayleigh critique  $R_{ac}$  augmente comme  $R_{ac} \propto \Omega_0^{4/3}$  pour une convection dans l'approximation Boussinesq ([Chandrasekhar, 1961](#); [Dormy et al., 2004](#)). Dans l'idéal, cela requiert donc que  $\nu, \kappa \propto \Omega^{-2}$ . Cette variation en viscosité et diffusivité thermique influence probablement la convection et les écoulements à grande échelle générées. Dans l'idéal, il faudrait compléter cette série de simulations en faisant varier  $\nu$  et  $\kappa$ , tout en explorant également la variation du nombre de Prandtl. Évidemment, ceci relève de la gageure à cause des limitations numériques. Des faibles viscosités et diffusivités thermiques impliquent également des temps de relaxation plus longs et des échelles de convection plus petites qu'il faut pouvoir résoudre, requérant

des simulations à hautes résolutions sur de très longues périodes de temps. On choisit ici une solution intermédiaire en adoptant  $\nu, \kappa \propto \Omega^{-1/2}$ , ce qui nous permet de garder un niveau de supercriticalité relativement élevé (cf [Table 6.3](#)). Ce choix arbitraire est susceptible d’influencer les valeurs exactes des conclusions présentées ci-après. Cependant, tant que le flux de chaleur est principalement véhiculé par la convection<sup>2</sup>, la convection reste largement affectée par la variation de la luminosité de l’étoile et du taux de rotation.

Enfin, la diffusivité irrésolue  $\kappa_0$  est choisie de telle sorte qu’elle transporte l’ensemble de l’énergie en haut du domaine de simulation et que le flux irrésolu (5.21d) soit négligeable dans le reste du domaine, de manière identique à celle décrite dans la Section 5.3.4.

### 6.2.3 Propriétés générales

De la même façon que décrit dans la Section 5.3.2, ces modèles s’appuient sur un modèle d’évolution stellaire 1D nous donnant les propriétés globales de chaque étoile considérée. On voit sur la [Figure 6.3](#) que les profils atteints dans les simulations 3D sont extrêmement proches du modèle 1D traduisant l’évolution lente de ces variables au cours de la simulation.

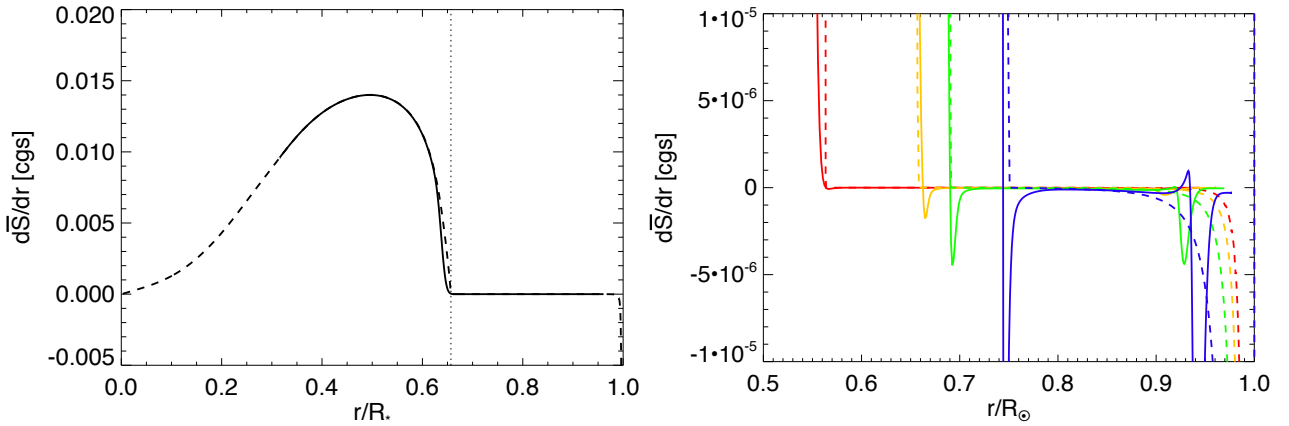


**FIGURE 6.3** – Profil radial des variables thermodynamique (densité, température, pression) pour chaque masse considérée dont le code couleur est le même que dans la [Figure 6.2](#). On représente en trait plein le profil issu de la simulation 3D ASH et en tirets celui donné par le code 1D CESAM pour un âge solaire.

Dans le panneau de gauche de la [Figure 6.4](#), on représente le gradient d’entropie en fonction du rayon pour l’étoile à  $0.7 M_\odot$  comme cas représentatif des 12 simulations. Cette fonction reproduit globalement avec fidélité le modèle 1D mais s’en écarte de manière significative en plusieurs endroits car la convection est modélisée par la théorie de la longueur de mélange alors qu’elle est traitée ici de manière cohérente. Tout d’abord près de la surface, le transport de chaleur est entièrement assuré par le flux de chaleur  $F_u$ , ce qui limite la superadiabaticité. Ensuite, à la BCZ, bien que l’on initialise le modèle avec un profil proche du modèle 1D, les écoulements descendants de la convection déposent continuellement de la matière de faible entropie juste avant de pénétrer dans la zone radiative. Ceci a pour effet de rendre plus superadiabatique cette région. Notons que cet écart est d’autant plus fort que la masse de l’étoile augmente (cf panneau de droite de la [Figure 6.4](#)) car les plumes transportent d’autant plus de matière.

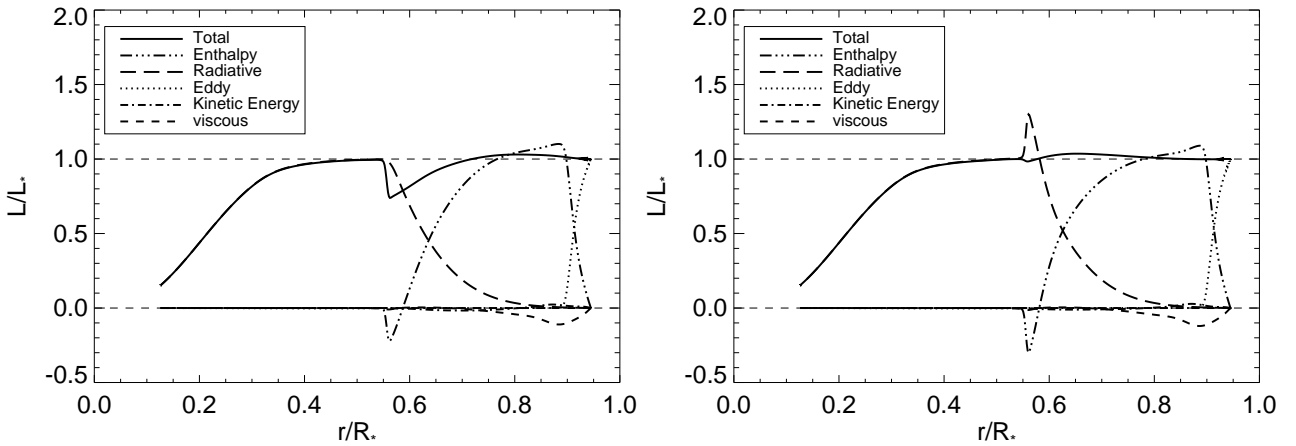
On représente dans la [Figure 6.5](#) les divers processus physiques transportant l’énergie dans l’étoile. En comparant à la [Figure 5.6](#), on voit que le transport de l’énergie est intégralement assuré par la diffusivité radiative dans la zone radiative. Pour une description des processus de transport dans la zone convective, on référera le lecteur à la Section 5.3.4. Dans les couches les plus profondes, la luminosité totale décroît car on entre dans le cœur de l’étoile, là où l’énergie est créée par fusion nucléaire. Cette

2. Autrement dit, le nombre de Nusslet est supérieur à l’unité.



**FIGURE 6.4** – *A gauche* : Profil radial du gradient d’entropie pour l’étoile à  $0.7 M_{\odot}$  comme cas représentatif de nos modèles. La ligne verticale en pointillés matérialise la position de la BCZ en  $R_{CZ}$ . *A droite* : Zoom sur la base de la zone convective du profil radial du gradient d’entropie pour les modèles M05R1, M07R1, M09R1 et M11R1 (code couleur identique à la Figure 6.2). Dans les deux panneaux, le trait plein représente le profil atteint dans les simulations alors que le trait en tirets indique le profil du code 1D CESAM.

zone est d’autant plus visible que la masse est faible puisque le domaine de simulation pénètre plus loin dans l’étoile relativement à son rayon (cf Table 6.1).



**FIGURE 6.5** – idem que la Figure 5.6 pour le modèle M05R1 (à gauche) avant et (à droite) après avoir ajusté la diffusivité radiative comme expliqué dans le texte.

Comme le transport d’énergie par convection dans ces simulations n’est pas équivalent à la théorie de longueur de mélange prescrite dans les modèles 1D, la simulation doit s’ajuster en conséquence. En particulier, le phénomène d’overshoot produit un déficit de flux d’énergie proche de la base de la zone convective (cf panneau de gauche de la Figure 6.5). Idéalement, le système va ajuster sa structure thermique interne pour rétablir l’équilibre. Cependant, ce processus prendrait un temps de l’ordre du temps de Kelvin Helmholtz  $E_i/L_* \sim 10^5$  ans où  $E_i$  est l’énergie interne et  $L_*$  est la luminosité de l’étoile. Pour ne pas voir affaire à cette échelle de temps non appropriée à ces simulations 3D, nous choisissons d’accélérer le processus de relaxation thermique en augmentant localement la diffusivité radiative  $\kappa_r$  de la même manière que décrite dans Miesch et al. (2000) et Brun et al. (2011). On choisit alors le profil de  $\kappa_r$  de telle sorte à compenser la moyenne temporelle du flux d’enthalpie  $F_e$  dans cette région. On représente le modèle M05R1 comme cas représentatif dans la Figure 6.5. Après cet ajustement, le

modèle atteint un état d’équilibre statistiquement stationnaire au bout de quelques dizaines de temps de retournement convectif. Notons que plus la masse de l’étoile augmente, plus le déficit de flux est important. Au taux de rotation solaire, il n’est que de  $0.1L_*$  pour  $0.5 M_\odot$  mais monte à  $0.5L_*$  pour  $1.1 M_\odot$ .

Pour s’assurer que les modèles aient atteint un état d’équilibre statistiquement stationnaire, il faudrait en principe que chacun d’entre eux évoluent sur plusieurs temps diffusifs de l’ordre de  $\tau_\nu$  qui va de 1000 à 76000 jours selon le modèle considéré (cf [Table 6.2](#)). Au moment de la rédaction de ce manuscrit, quelques modèles n’ont pas encore évolué sur de tels temps, en particulier le modèle M05R3 dont on considérera les résultats comme susceptibles d’encore évoluer. Cependant, une grande partie des quantités, par exemple celles associées à la convection, évoluent sur des temps bien plus courts, de l’ordre du temps de retournement  $\tau_{to} \sim 50$  jours. Les résultats présentés ne devraient donc être que peu altérés par l’évolution à long terme des modèles. De plus, nos modèles sont basés sur un modèle 1D stellaire, ce qui facilite cette phase de relaxation qui possède dès l’initialisation une stratification proche de la solution finale et non une stratification quelconque. On résume dans la [Table 6.3](#) les nombres sans dimension qui caractérisent la nature de l’écoulement des 12 simulations. Les vitesses typiques réalisées dans ces simulations sont identiques à celles trouvées dans le Chapitre 5 et énumérées dans les premières colonnes de la [Table 5.3](#).

**TABLE 6.3** – Nombres sans dimension caractéristiques des modèles. Nombre de Reynolds ( $R_{e1}$  et  $R_{e2}$  tels que définis par les équations (6.3)), Rayleigh ( $R_a$ ), Rossby stellaire ( $R_{os}$ ), Rossby convectif ( $R_{oc}$ ), Rossby Fluide ( $R_{of}$ ), Péclet ( $P_e$ ) et Taylor ( $T_a$ ). Les valeurs indiquées sont la moyenne prise dans la zone convective.

Nom	$R_a$ ( $10^7$ )	$T_a$ ( $10^4$ )	$R_{e1}$	$R_{e2}$	$R_{os}$	$R_{oc}$	$R_{of}$	$P_e$
M05 R1	1.22	$5.00 \times 10^3$	57.2	309	0.12	0.93	0.34	14.3
M05 R3	4.00	$1.35 \times 10^5$	77.7	261	0.03	0.36	0.12	19.4
M05 R5	17.70	$6.24 \times 10^5$	95.9	835	0.02	0.31	0.10	24.0
M07 R1	0.11	$2.40 \times 10^2$	21.8	102	0.21	1.17	0.36	5.5
M07 R3	1.09	$6.49 \times 10^3$	27.5	249	0.06	0.58	0.16	6.9
M07 R5	2.70	$3.01 \times 10^4$	33.7	393	0.03	0.41	0.10	8.4
M09 R1	0.05	$5.10 \times 10^1$	20.1	62	0.42	1.96	0.57	5.0
M09 R3	0.36	$1.39 \times 10^3$	27.9	201	0.12	0.92	0.27	7.0
M09 R5	0.97	$6.42 \times 10^3$	33.1	302	0.07	0.68	0.21	8.3
M11 R1	0.02	8.12	21.7	53	1.09	3.81	1.16	5.4
M11 R3	0.11	$2.18 \times 10^2$	28.5	127	0.30	1.53	0.50	7.1
M11 R5	0.33	$1.01 \times 10^3$	33.5	218	0.17	1.10	0.33	8.4

Pour quantifier le degré de turbulence atteint dans nos modèles, on distingue deux nombres de Reynolds  $R_{e1}$  et  $R_{e2}$  définis par les équations (6.3). Chacun s’appuie sur la moyenne quadratique (rms) de la vitesse.

$$R_{e1}(r) = \frac{\tilde{v}_r(r)L_{CZ}}{\nu(r)} \quad (6.3a)$$

$$R_{e2}(r) = \frac{\sqrt{\tilde{v}_r(r)^2 + \tilde{v}_\theta(r)^2 + \tilde{v}_\phi(r)^2}L_{CZ}}{\nu(r)} \quad (6.3b)$$

où  $L_{CZ} = R_* - R_{CZ}$  est la taille de la zone convective et  $(\tilde{v}_r, \tilde{v}_\theta, \tilde{v}_\phi)$  sont les valeurs rms de chaque composante de la vitesse. L'ensemble de nos modèles atteint un nombre de Reynolds  $R_{e2}$  de l'ordre de quelques centaines. Le nombre de Reynolds  $R_{e1}$  directement relié à la convection est de l'ordre de quelques dizaines. Cette différence est attribuée principalement à la forte contribution de  $\tilde{v}_\phi$  qui est le reflet de la vitesse associée à la rotation différentielle. Pour obtenir un nombre de Reynolds plus représentatif de l'écoulement, on pourrait alors définir un autre nombre de Reynolds semblable à la définition (6.3b), mais utilisant la fluctuation de la vitesse longitudinale  $\tilde{v}'_\phi$  auquel on a retiré la rotation différentielle globale<sup>3</sup>, comme celui défini dans la Table 5.3. Comme  $\tilde{v}_r$ ,  $\tilde{v}_\theta$  et  $\tilde{v}'_\phi$  ont la même amplitude (cf Table 5.3), ce nombre de Reynolds différerait de  $R_{e1}$  d'un facteur  $\sqrt{3}$ . On choisit de ne considérer que  $R_{e1}$  et  $R_{e2}$  par commodité. Pour chaque masse considérée, ces deux nombres de Reynolds augmentent avec le taux de rotation, ce qui est dû principalement à notre choix de diffusivité  $\nu, \kappa \propto \Omega^{-1/2}$ . L'échelle intégrale correspond essentiellement à la taille de la zone convective  $L_{CZ}$  puisqu'elle correspond à la taille des plumes convectives. Ces dernières maintiennent leur cohésion tout au long de leur traversée de la surface jusqu'à la base de la zone convective.

On portera une attention particulière au nombre de Rossby qui semble être l'un des paramètres clé de la dynamique comme le suggèrent les observations et les simulations (cf Section 6.1). Dans la littérature, une grande variété de nombre de Rossby existe selon la communauté qui les utilise. Pour pouvoir comparer nos simulations à ces travaux, on présente ici 3 nombres de Rossby différents : stellaire ( $R_{os}$ ), fluide ( $R_{of}$ ) et convectif ( $R_{oc}$ ), définis par :

$$R_{os} = \frac{P_{\text{rot}}}{\tau_{to}} \quad (6.4a)$$

$$R_{of} = \frac{\omega}{2\Omega_0} \quad (6.4b)$$

$$R_{oc} = \sqrt{\frac{R_a}{T_a P_r}} \quad (6.4c)$$

Le nombre de Rossby stellaire  $R_{os}$  est le rapport entre la période de rotation  $P_{\text{rot}} = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  et le temps de retournement convectif  $\tau_{to} = L_{CZ}/\tilde{v}_r$ ,  $R_{of}$  est le rapport entre la vorticité  $\omega = |\nabla \times \mathbf{v}|$  (  valu  e par la valeur moyenne dans la zone convective) au taux de rotation  $\Omega_0$ , et  $R_{oc}$  est une combinaison du nombre de Taylor, Rayleigh et Prandtl (Gilman and Glatzmaier, 1981). Dans la Figure 6.6, on représente deux nombres de Rossby  $R_{oc}$  et  $R_{of}$  en fonction du troisième  $R_{os}$  pour chacun de nos modèles, issus de la Table 6.3.

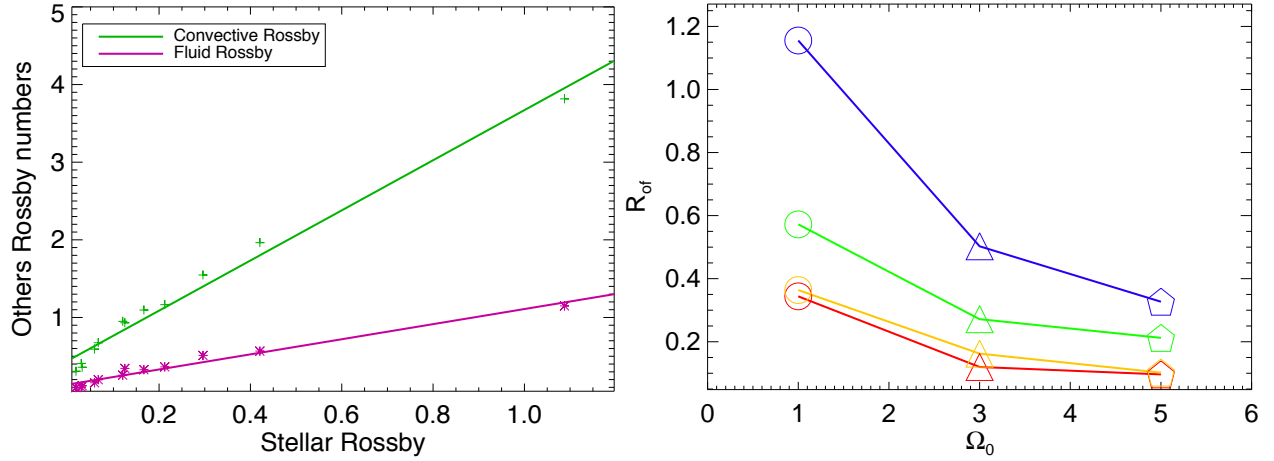
On remarque qu'il y a une relation linéaire entre chacun de ces nombres, ce qui nous permet de parler indifféremment du nombre de Rossby dans les relations de proportionnalité. Dans toute la suite de ce chapitre, on choisit d'utiliser le nombre de Rossby fluide  $R_{of}$  pour quantifier le rapport entre l'inertie et la force de Coriolis car avec ce choix, le modèle M11R1 possède  $R_{of} > 1$ . Dans le panneau droit de la Figure 6.6, on représente  $R_{of}$  en fonction du taux de rotation, pour identifier les modèles qui partagent des nombres de Rossby similaires. On retrouve évidemment le fait que  $R_{of}$  diminue avec  $\Omega_0$  selon la définition (6.4b). Pour un taux de rotation fixe,  $R_{of}$  augmente avec la masse car la convection est plus vigoureuse.

## 6.3 Dynamique de la zone convective

La nature complexe et changeante de la convection atteinte dans nos simulations peut être visualisée à l'aide de la composante radiale de la vitesse  $v_r$  (cf Figure 6.7). La convection est caractérisée par des écoulements ascendants larges et chauds enlacés par un réseau d'écoulements descendants plus

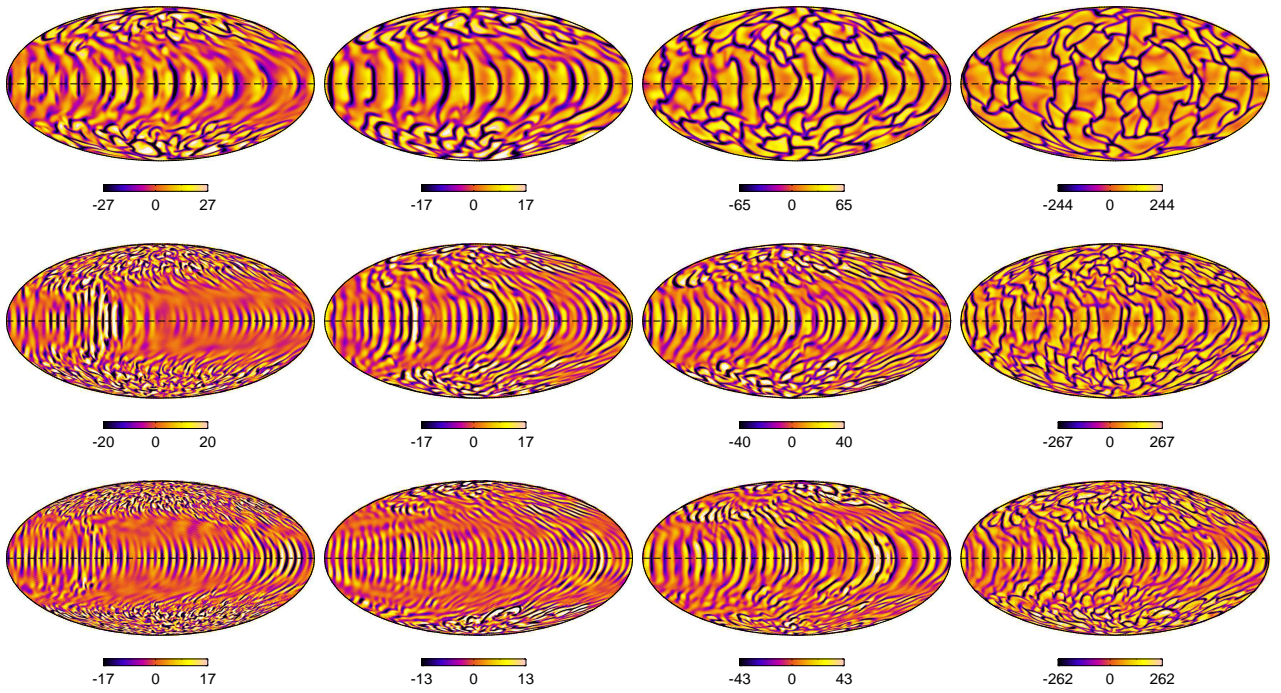
3. Autrement dit, on retire la moyenne temporelle telle que  $\tilde{v}'_\phi = \tilde{v}_\phi - \langle \tilde{v}_\phi \rangle_t$





**FIGURE 6.6** – À gauche : Nombres de Rossby convectif  $R_{oc}$  (symbole plus verts) et fluide  $R_{of}$  (symbole astérisque violet) en fonction du nombre de Rossby stellaire  $R_{os}$ , de nos 12 modèles. Les traits correspondent à un ajustement linéaire. À droite :  $R_{of}$  en fonction du taux de rotation mettant en avant les modèles qui partagent des nombres de Rossby similaires. Le code couleur et les symboles sont les mêmes que ceux utilisés dans la Figure 6.2.

denses et froids. Une cellule convective peut conserver sa cohérence pendant quelques jours avant de rencontrer et fusionner ou se diviser avec des cellules adjacentes<sup>4</sup>. La forme que prend la convection dépend alors à la fois de  $M_*$  mais aussi du taux de rotation  $\Omega_0$ .



**FIGURE 6.7** – Composante radiale de la vitesse  $v_r$  (donnée en  $\text{m.s}^{-1}$ ) proche de la surface pour chaque modèle. De la gauche vers la droite, la masse est croissante de 0.5 à 1.1  $M_\odot$ , et la taux de rotation est de 1, 3 et 5  $\Omega_\odot$  du haut vers le bas.

4. Pour une description plus détaillée de la convection, le lecteur peut se reporter à la Section 5.4.

On retrouve ici un comportement extrêmement similaire aux modèles de zone convective du Chapitre 5. On distingue globalement deux régions selon la morphologie des cellules convectives. Proche de l'équateur, c'est-à-dire en dehors du cylindre tangent<sup>5</sup>, les cellules se propagent dans le sens prograde (sauf pour le modèle M11R1 que l'on décrit plus bas) et sont alignées avec l'axe de rotation. Au contraire, les régions plus proches des pôles, i.e. à l'intérieur du cylindre tangent exhibent une convection plus isotrope et à plus petites échelles. Leur temps de cohérence est plus faible qu'à l'équateur puisqu'elles interagissent continuellement avec leurs voisines sous le mélange imposé par l'écoulement global rétrograde. La séparation entre ces deux régions se manifeste par un fort cisaillement latitudinal des écoulements en rotation opposée (dans le référentiel en mouvement). En comparant la Figure 6.7 à son équivalent du Chapitre 5, la Figure 5.8, on remarque que l'écoulement est légèrement plus laminaire, ce qui se manifeste par des cellules bananes à l'équateur plus marquées et des cellules convectives plus larges. Ceci est dû à la valeur plus élevée de la viscosité dans les simulations présentées ici pour un taux de rotation fixé. Seul le modèle M11R1 possède des caractéristiques opposées à ce qui a été décrit précédemment. La distinction entre les régions polaires et équatoriales est quasi inexistante. Elles ont également une rotation inversée : la première est prograde alors que la seconde est rétrograde, ce qui est la manifestation d'une rotation différentielle anti solaire (cf Section 6.4.1), justifiant a posteriori notre choix de  $R_{of}$ .

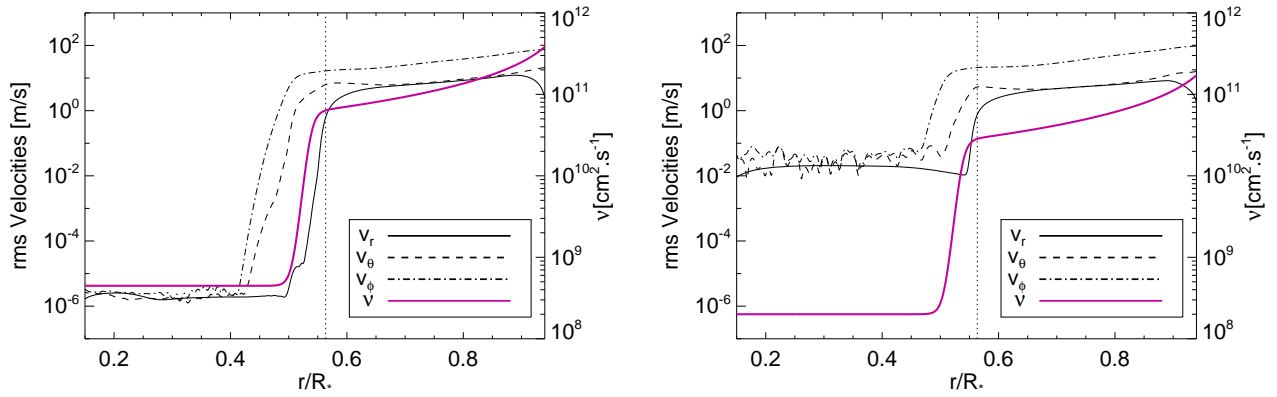
Intéressons nous maintenant à l'effet de la rotation sur la convection proche de la surface. On voit que l'augmentation du taux de rotation a des effets analogues quelle que soit la masse de l'étoile, qui sont dus à la fois à la réduction du nombre de Rossby, mais aussi à la différence de viscosité (cf Section 6.2.2). Tout d'abord, la distinction entre les régions polaires et équatoriales s'accroît, bien que la taille de l'ensemble des cellules convectives diminue lorsque le taux de rotation, et donc le nombre de Taylor  $T_a$ , augmente. Les cellules bananes sont de plus en plus marquées, ce qui est particulièrement visible sur les modèles M11 et ont une extension longitudinale de plus en plus réduite. En effet, pour un rayon donné, le mode  $m$  convectif le plus instable augmente avec  $T_a$  (Gilman and Glatzmaier, 1981; Dormy et al., 2004; Jones et al., 2009), ce qui signifie que ces modes ont une extension longitudinale moindre. Dans certains cas, la convection est caractérisée par la présence d'*active nests* (Ballot et al., 2007; Brown et al., 2008) localisée en temps et longitude, au sein desquels la vitesse est environ 10 fois plus élevée que leur environnement. Ces *active nests* apparaissent à des taux de rotation différents en fonction de la masse de l'étoile, apparaissant plus précocement pour les plus faibles masses. Il semble que les modèles ayant un nombre de Rossby  $R_{of} \lesssim 0.25$  montrent clairement un tel état, bien que la transition se fait de manière continue. Les étoiles possédant un nombre de Rossby comparable possèdent des propriétés extrêmement proches comme l'amplitude de la vitesse radiale, les modes de l'instabilité convective ou encore la présence ou absence d'*active nests*. On s'attend alors par exemple à ce que l'étoile à  $1.1 M_\odot$  montre des *active nests* lorsque  $\Omega_0 > 6.5\Omega_\odot$ .

On se demande maintenant comment évolue la vitesse en fonction de la profondeur. On représente dans la Figure 6.8 le profil radial des différentes composantes de la vitesse rms pour le modèle M05R1 et M05R5 comme cas représentatif.

La valeur rms de chaque composante de la vitesse chute de plusieurs ordres de grandeur entre sa valeur moyenne dans la zone convective et dans la zone radiative. Dans le cas à  $1\Omega_\odot$ , les 3 composantes de la vitesse chutent de 7 ordres de grandeur alors qu'elles ne chutent que de 3 ordres de grandeur dans le cas à  $5\Omega_\odot$ . Alors que l'amplitude de ces vitesses est similaire dans les deux cas au sein de la zone convective, elle est supérieure de 4 ordres de grandeur dans le cas à haute rotation dans la zone radiative. L'augmentation de ces amplitudes avec le taux de rotation (pour chaque masse) est probablement liée à des ondes de gravité plus fortes mais dont l'étude est au delà des ambitions de ce manuscrit. Cependant, la très forte différence en amplitude peut provenir également d'un artefact numérique. On s'intéresse plus particulièrement à la composante radiale  $\tilde{v}_r$  qui représente la convection. On voit que son amplitude chute à la tachocline en  $R_{cz}$  sur une épaisseur de quelques pourcents du

5. Voir définition à la Section 5.4.





**FIGURE 6.8** – Profil radial de la vitesse rms  $\tilde{v}_r$  (trait plein),  $\tilde{v}_\theta$  (tirets),  $\tilde{v}_\phi$  (trait mixte). On représente également le profil radial de la viscosité en trait épais violet. Les deux figures pour le cas M05R1 (à gauche) et M05R5 (à droite) partagent les mêmes axes. La ligne verticale en pointillés matérialise la position de la BCZ donnée par le code 1D CESAM.

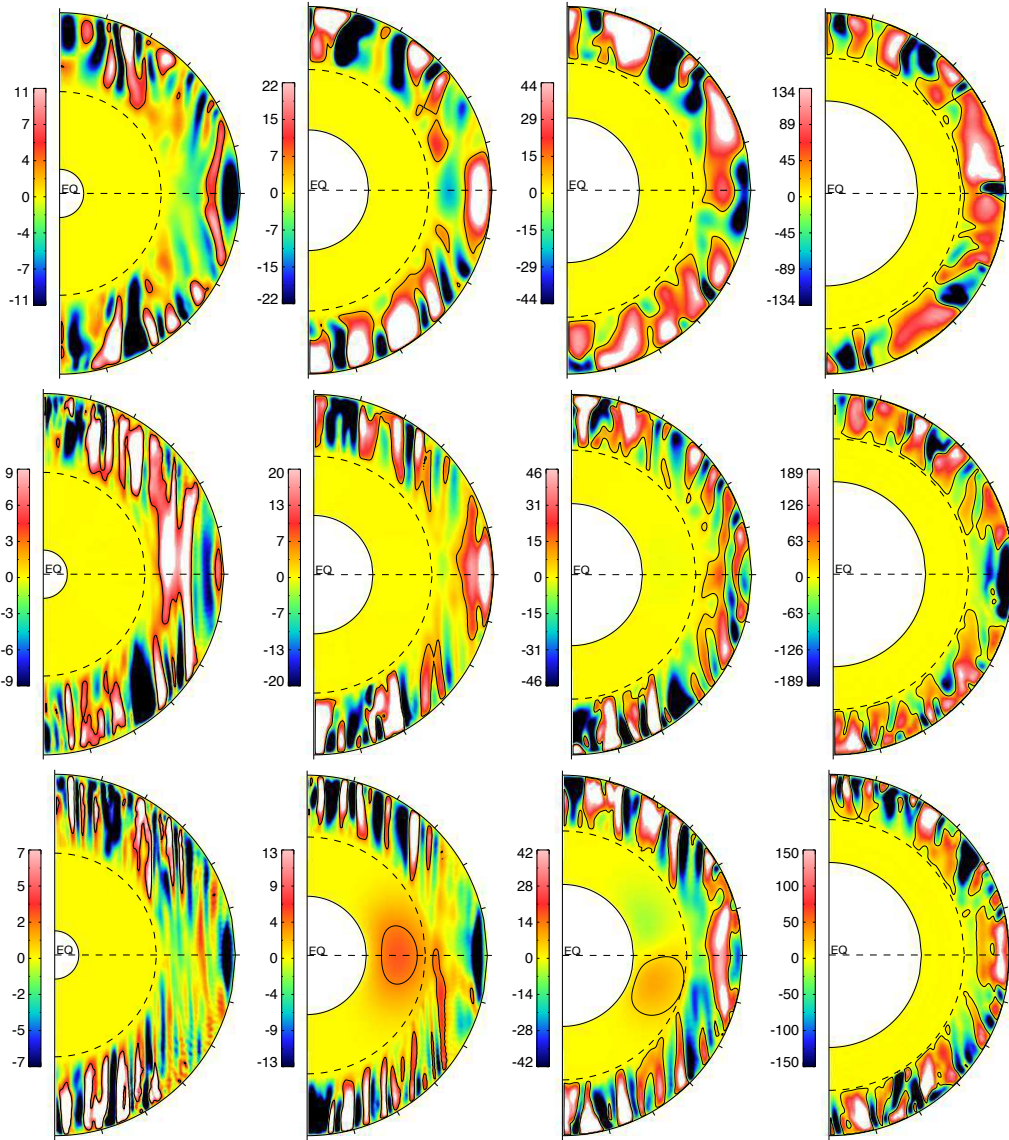
rayon stellaire, ce qui représente la profondeur de pénétration du phénomène d'overshooting.

Sur la [Figure 6.9](#), on représente  $v_r$  à un instant donné dans un plan méridien pour une longitude fixe. La zone radiative se distingue clairement par l'amplitude extrêmement faible de la vitesse. L'amplitude de cette vitesse n'est pas négligeable dans la zone radiative des modèles M07R5 et M09R5. Cette singularité est artificielle et est liée à l'accélération du modèle de  $1\Omega_\odot$  à  $5\Omega_\odot$ . Les autres modèles ont été initialisées avec un taux de rotation de  $5\Omega_\odot$  et ne montrent pas de telles amplitudes. De plus, nous avons testé une initialisation à  $5\Omega_\odot$  pour les étoiles à 0.7 et 0.9  $M_\odot$  qui ont également des vitesses négligeables dans la zone radiative. Nous supposons alors que ces écoulements n'influencent pas les propriétés de la zone convective qui nous intéressent ici.

La convection n'est pas forcément complètement radiale mais est en fait déviée de sa trajectoire par la force de Coriolis au cours de son ascension ou descente comme dans le [Chapitre 5](#). L'amplitude de cette déviation augmente avec le taux de rotation, cherchant à satisfaire la contrainte de Taylor-Proudman. On retrouve la différence en latitude entre les régions équatoriales à l'extérieur du cylindre tangent largement influencées par la rotation qui tend à aligner l'écoulement avec l'axe de rotation ; et les régions à plus hautes latitudes à l'intérieur de ce même cylindre où la convection est plus isotrope et à plus petite échelle (cf [Section 5.4](#)). En dehors du cylindre tangent, les plumes convectives peuvent se connecter d'un hémisphère à un autre en traversant l'équateur. À l'intérieur du cylindre, ces écoulements rencontrent généralement la zone stable avant de pouvoir s'apparier avec des écoulements émanant de l'hémisphère opposé. Ces contraintes deviennent de plus en plus forte au fur et à mesure que le taux de rotation augmente. Encore une fois, on retrouve des comportements très similaires pour des nombres de Rossby comparables, si l'on met de côté les aspects géométriques liés à la variation de la taille relative de la zone convective par rapport à la zone radiative. Pour des nombres de Rossby élevés, l'écoulement est principalement radial mais devient de plus en plus vertical au fur et à mesure que l'influence de la rotation augmente.

La déviation ne se produit pas uniquement dans le plan méridien, mais également dans le plan de l'équateur comme on peut le voir sur la [Figure 6.10](#) à cause de la force de Coriolis.

On voit à nouveau que pour les nombres de Rossby les plus élevés, la convection est quasi radiale traversant toute la zone convective comme on l'a vu dans la [Figure 6.9](#). En revanche, pour des nombres de Rossby de plus en plus faibles, la convection est de plus en plus déviée jusqu'à être quasiment inhibée. Les plumes convectives perdent alors leur cohérence sous une couche externe à la surface de l'étoile. Cette vue permet de mettre en avant la position des active nests décrits précédemment. Ces derniers se

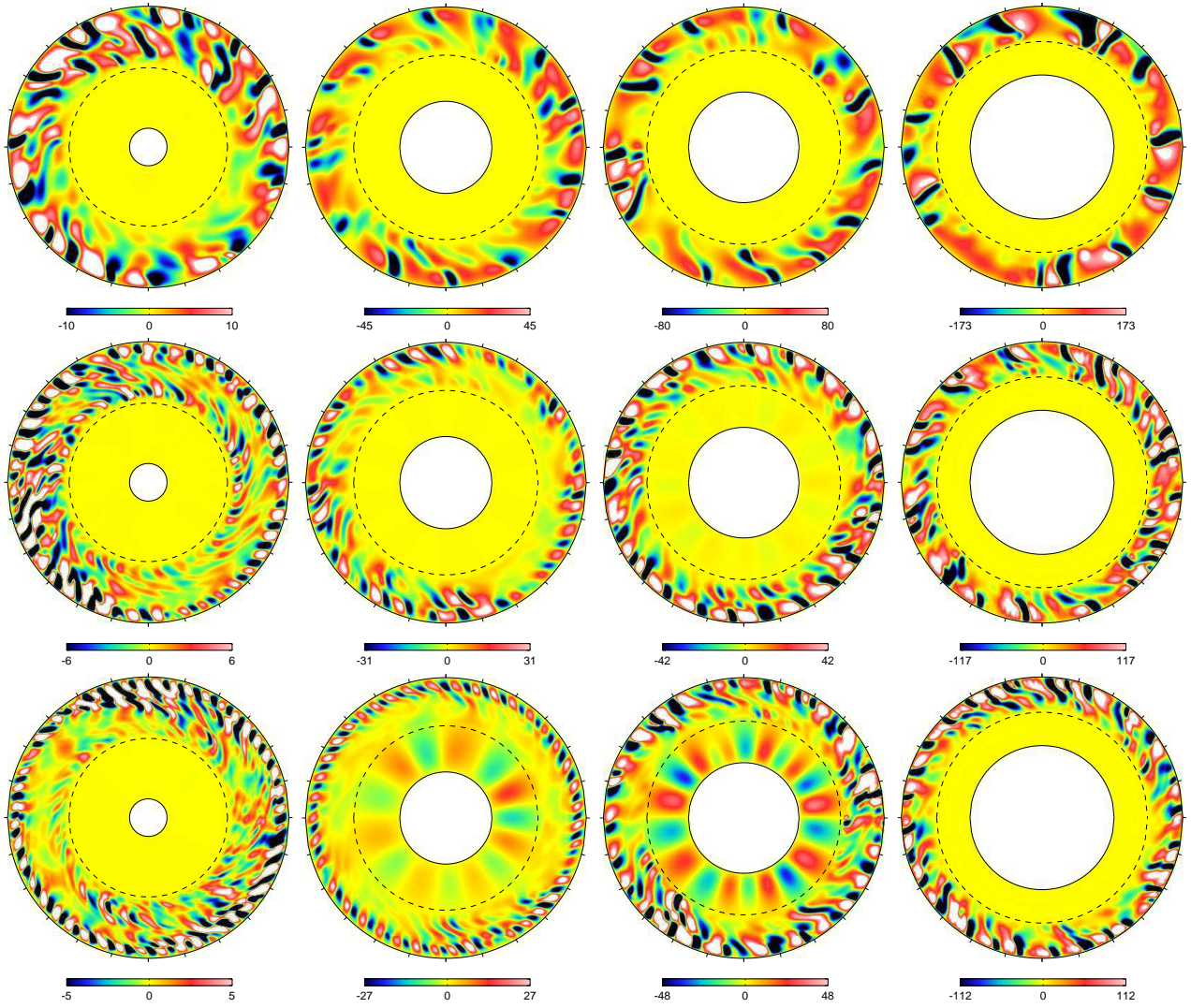


**FIGURE 6.9** – Composante radiale de la vitesse  $v_r$  (donnée en  $\text{m.s}^{-1}$ ) à une longitude fixée pour l'ensemble de nos modèles dans le même ordre que dans la Figure 6.7. Les traits pleins marquent la limite du domaine de résolution alors que les traits en pointillés localisent la BCZ. Les marqueurs à la surface sont placés tous les  $15^\circ$ .

manifestent par des zones confinées longitudinalement dans lesquelles des plumes convectives de fortes amplitudes pénètrent jusqu'à la zone radiative. Ce phénomène explique l'absence, dans la Figure 6.9, de mouvements convectifs dans certaines coupes selon si ces dernières sont dans ou hors de ces active nests.

## 6.4 Écoulements à grande échelle

L'intégralité de nos modèles a été initialisée par un état de rotation solide, i.e.  $\Omega$  est uniforme à tout rayon et latitude. Le développement de l'instabilité convective pour  $r > R_{cz}$  et sa maturation sur plusieurs périodes de rotation permet l'établissement d'écoulements à grande échelle axisymétriques : la rotation différentielle et la circulation méridienne (Glatzmaier and Gilman, 1982; Thompson et al., 2003; Miesch, 2005; Brun and Rempel, 2009; Miesch and Toomre, 2009). Nous discutons dans cette



**FIGURE 6.10** – Coupe dans le plan de l'équateur dans lequel on représente la vitesse radiale  $v_r$  (donnée en  $\text{m.s}^{-1}$ ) dans le même ordre que dans la Figure 6.7. En bleu et en rouge,  $v_r < 0$  et  $v_r > 0$  respectivement. Le cercle en tirets représente la position de la BCZ, et ceux en trait plein la limite de notre domaine de résolution. Les marqueurs à la surface sont placés tous les  $15^\circ$ .

section de leurs propriétés respectives.

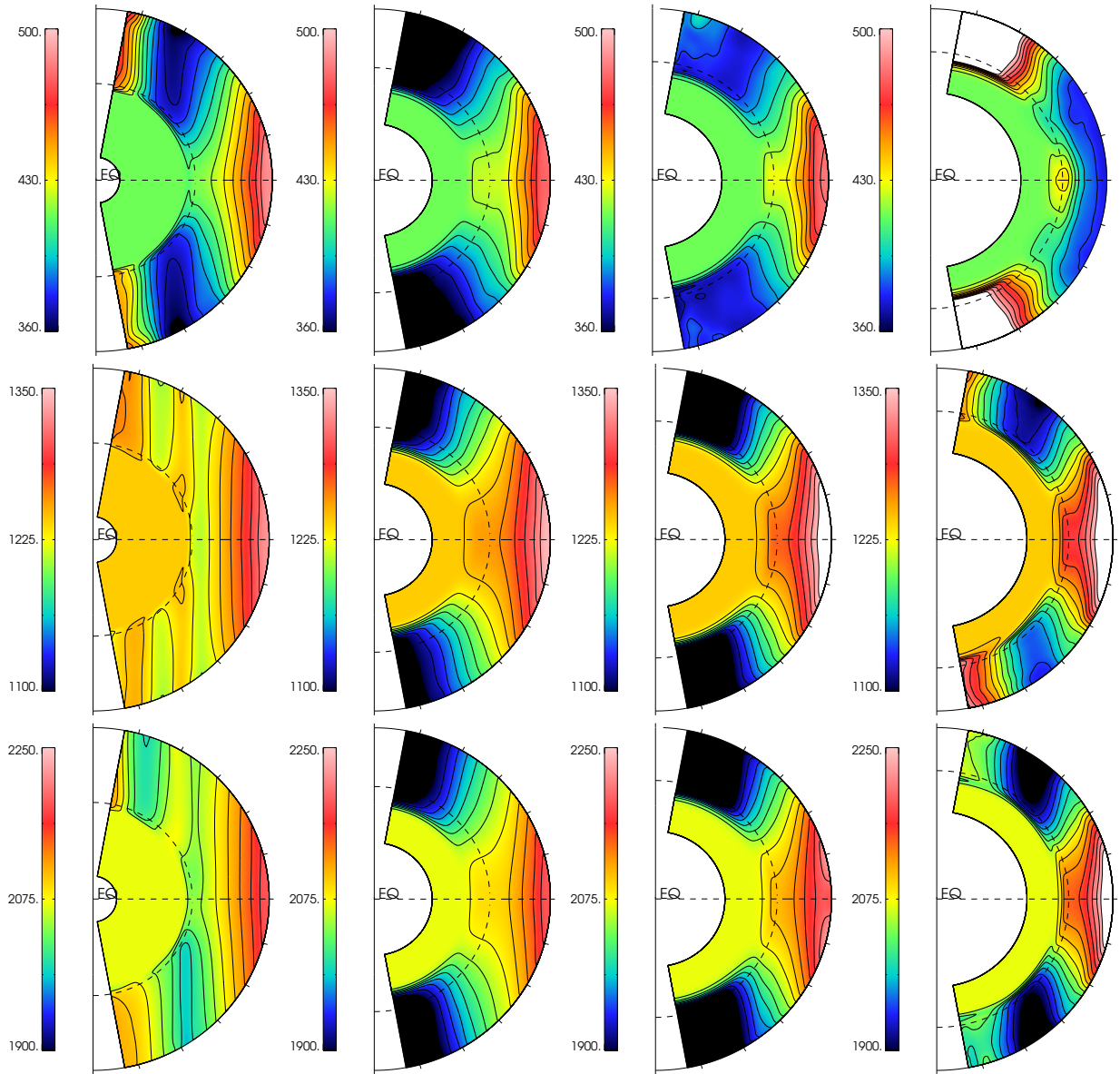
#### 6.4.1 Rotation différentielle

On représente dans la Figure 6.11 le profil de rotation atteint à l'état stationnaire pour l'ensemble des modèles après une évolution de plusieurs temps diffusifs, et moyenné sur une dizaine de périodes de rotation. On peut voir clairement dans chaque cas l'établissement d'une rotation différentielle à la fois radiale et latitudinale. Dans tous les modèles, sauf M11R1, la rotation est plus rapide à l'équateur et plus lente aux pôles. Pour les étoiles de masse  $0.7$  et  $0.9 M_\odot$ , le gradient latitudinal est monotone de l'équateur jusqu'aux pôles. On peut alors définir l'amplitude caractéristique de cette rotation différentielle  $\Delta\Omega$  en prenant la différence de rotation  $\Omega$  à la surface entre l'équateur et une latitude de  $\theta_\ell = 60^\circ$  comme cela a été déjà utilisée dans la littérature (Miesch et al., 2008; Brun et al., 2011; Augustson et al., 2012).



$$\Delta\Omega = \Omega(R_{\text{top}}, \theta_\ell = 0^\circ) - \Omega(R_{\text{top}}, \theta_\ell = 60^\circ) \quad (6.5)$$

Les autres modèles M05 et M11 (sauf le cas M11R1) montrent une structure latitudinale en bandes, c'est-à-dire que le gradient de rotation n'est pas monotone. On conserve néanmoins la définition (6.5) qui caractérise bien l'amplitude moyenne de la rotation différentielle. L'ensemble des valeurs est reporté dans la [Table 6.4](#). Le modèle M11R1 est le seul à montrer une rotation différentielle anti solaire, c'est-à-dire avec des pôles plus rapides que l'équateur. Cette caractéristique a déjà été relevée dans la [Section 5.5.1](#) et était expliquée par l'épaisseur plus fine de la zone convective. Dans cette étude, on voit qu'à plus haut taux de rotation, le profil redevient solaire, suggérant qu'à la fois la taille mais aussi le taux de rotation globale influencent la redistribution de moment cinétique (cf [Section 6.5.1](#)).



**FIGURE 6.11** – Fréquence de rotation (donnée en nHz) moyennée dans le temps et sur l'azimuthe dans une coupe méridienne dans le même ordre que dans la [Figure 6.7](#). Pour un même taux de rotation, le code couleur est conservé. On représente en tirets la localisation de l'équateur et de la tachocline fournie par le modèle 1D CESAM. Les marqueurs à la surface sont placés tous les  $15^\circ$ .

On remarque également que les modèles montrant une rotation différentielle en bandes ont leur profil de rotation parallèle à l'axe de rotation, satisfaisant la contrainte de Taylor-Proudman. Cette propriété n'est pas seulement dépendante du nombre de Rossby puisque par exemple les modèles M05R3 et M07R5, qui possèdent pourtant des nombres de Rossby très similaires, présentent une rotation différentielle aux caractéristiques très différentes. Les modèles M07, M09 et M11 montrent en effet une rotation différentielle qui, outre le fait qu'elle soit monotone, dépend peu du rayon. Cette propriété nécessite de briser la contrainte de Taylor-Proudman grâce à la présence d'un gradient latitudinal d'entropie, et donc de température, comme on peut le voir en étudiant l'équation du vent thermique (cf Section 6.5.2).

Alors que la simulation progresse, une transition rapide se développe entre l'enveloppe convective en rotation différentielle et la zone radiative en rotation solide. Cette tachocline apparaît de manière auto-cohérente dans nos simulations et est d'une épaisseur de l'ordre de  $0.1 - 0.05R_*$  selon le modèle considéré, au moment montré dans la Figure 6.11. La position radiale de la tachocline diffère toutefois de celle donnée par les modèles 1D. Ceci est dû à deux effets, d'une part, la position à laquelle la viscosité chute, et d'autre part, la position en rayon de la tachocline (que l'on note  $R_{\text{tac}}$ ), qui évolue au cours de la simulation à cause de la viscosité. Ce processus se passe sur des temps diffusifs de la zone radiative, i.e.  $\tau_\nu(RZ) \sim 10^3 \tau_\nu(CZ)$  (cf Table 6.2), bien supérieurs au temps de la simulation. On s'attend donc à ce que la tachocline n'ait pas atteint un état stationnaire, mais continue au contraire de diffuser lentement vers le centre de l'étoile. Le fait que l'on observe aujourd'hui une tachocline aussi étroite dans le Soleil indique qu'un mécanisme physique inhibe la diffusion de la tachocline. Plusieurs mécanismes ont été invoqués : une turbulence anisotrope (Spiegel and Zahn, 1992; Elliott, 1997), un couple magnétique (Rudiger and Kitchatinov, 1997; Gough and McIntyre, 1998) ou encore l'existence d'ondes internes (Charbonnel and Talon, 2005; Rogers and Glatzmaier, 2006). Il n'existe toutefois encore aucun consensus clair sur ce mécanisme de confinement (voir par exemple Strugarek et al., 2011).

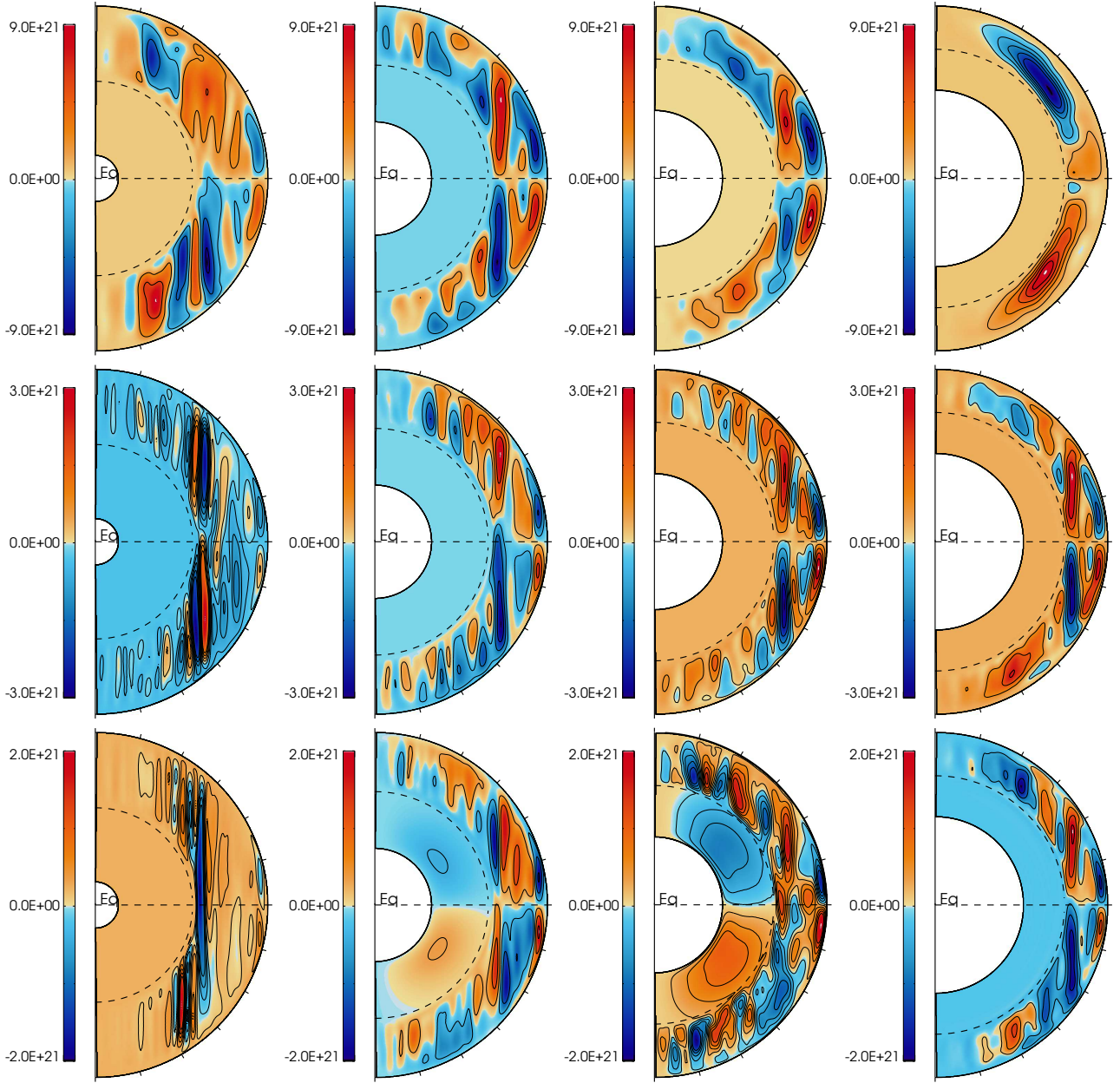
## 6.4.2 Circulation méridienne

On montre dans la Figure 6.12 la circulation méridienne en représentant les isocontours de la fonction de courant  $\psi$  associée, de la même façon que dans la Section 5.5.2 (cf équations (5.25)).

Les motifs bleus, i.e. lorsque  $\psi < 0$ , montrent les cellules tournant dans le sens anti-horaire et dans le sens horaire lorsque la fonction de courant  $\psi > 0$ , i.e. en rouge. La circulation méridienne est générée par le déséquilibre local entre les différents processus physiques agissant sur un écoulement en rotation sous l'influence de la force de Coriolis : le tenseur de Reynolds et la viscosité (éventuellement la force de Lorentz et le tenseur de Maxwell en présence de champ magnétique). Elle est donc la réponse à la force de Coriolis agissant sur l'écoulement longitudinal global, processus que l'on nomme pompage gyroscopique (McIntyre, 1998; Wood and McIntyre, 2007; Garaud and Bodenheimer, 2010; Miesch and Hindman, 2011). Plus formellement, on peut voir cet effet en considérant la moyenne azimuthale et temporelle de la composante longitudinale de l'équation du mouvement dans l'hypothèse sans champ magnétique (Miesch and Hindman, 2011) :

$$\langle \rho \mathbf{v} \rangle \cdot \nabla \mathcal{L} = -\nabla \cdot \left[ F_\lambda \hat{\lambda} + F_z \hat{z} \right] = \mathcal{T} \quad (6.6)$$

où  $\mathcal{L} = \lambda^2 \Omega = \lambda (\langle v_\phi \rangle + \lambda \Omega_0)$  est le moment cinétique spécifique,  $\lambda = r \sin \theta$  est le rayon cylindrique et  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{z}$  sont les vecteurs unités radial et vertical en coordonnées cylindriques. On définit également les flux de moment cinétique :



**FIGURE 6.12** – Contours de la fonction de courant  $\psi$  représentant la circulation méridienne dont la masse croît de la gauche vers la droite et dont le taux de rotation croît du haut vers le bas. L'axe de rotation est dirigée vers le haut. En bleu, l'écoulement tourne dans le sens anti-horaire et en rouge dans le sens horaire. Le code couleur est maintenu constant pour un taux de rotation donné.

$$F_\lambda = \underbrace{\bar{\rho}\lambda \langle v'_\lambda v'_\phi \rangle}_{\text{tenseur de Reynolds}} \underbrace{-\bar{\rho}\nu\lambda^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}}_{\text{tenseur visqueux}} \quad (6.7a)$$

$$F_z = \underbrace{\bar{\rho}\lambda \langle v'_z v'_\phi \rangle}_{\text{tenseur de Reynolds}} \underbrace{-\bar{\rho}\nu\lambda^2 \frac{\partial\Omega}{\partial z}}_{\text{tenseur visqueux}} \quad (6.7b)$$

où chaque composante du flux est la somme du tenseur de Reynolds et de la viscosité. Comme nous allons le voir dans la Section 6.5.1, ces mécanismes agissent conjointement pour maintenir la rotation

différentielle. Le moindre déséquilibre entre ces deux processus engendre l'advection du moment cinétique spécifique par un écoulement moyen dans le plan méridien, la circulation méridienne, comme on peut le voir dans l'équation (6.6).

Comme son origine est le résultat d'un déséquilibre local entre deux forces, la circulation méridienne est de nature extrêmement fluctuante. Il est donc nécessaire d'effectuer une moyenne temporelle sur plusieurs périodes de rotation pour faire apparaître les caractéristiques globales. Une grande diversité en amplitude et structure est encore montrée à travers nos modèles, mais l'on peut dégager plusieurs tendances. Tout d'abord, le modèle M11R1 se distingue encore une fois des autres puisqu'il est le seul à exhiber une circulation méridienne unicellulaire, anti-horaire dans l'hémisphère nord et horaire dans l'hémisphère sud. Elle est la seule à avoir cette caractéristique. Tous les autres modèles montrent au contraire une circulation méridienne multicellulaire à la fois en rayon et en latitude. Cependant, au fur et à mesure que la rotation augmente, la fragmentation est de plus en plus importante et même l'étoile à  $1.1 M_{\odot}$  possède une structure multicellulaire dès  $\Omega_0 = 3\Omega_{\odot}$ . On remarque que pour un taux de rotation fixé, la structure de la circulation méridienne est de plus en plus fragmentée pour des masses de plus en plus faible comme on a pu déjà le voir dans la Section 5.5.2. À nouveau, les modèles ayant des nombres de Rossby similaires partagent les mêmes caractéristiques. Plus ce dernier est faible, plus les cellules sont alignées avec l'axe de rotation. Les cas particuliers M07R5 et M09R5 ont une circulation méridienne, dans la zone radiative, qui est cependant artificielle pour les mêmes raisons que celles décrites dans la Section 6.3. Dans tous les autres cas, la circulation méridienne est confinée dans la zone convective et pénètre sur  $0.05R_*$  dans la zone radiative. Puis, plus profondément, son amplitude chute de plusieurs ordres de grandeur comme on peut le voir en regardant  $\tilde{v}_{\theta}$  sur la Figure 6.8.

### 6.4.3 Lois d'échelles en fonction de la masse et du taux de rotation

Grâce au choix de viscosité expliqué dans la Section 6.2.2, l'espace de paramètres couverts par nos simulations est essentiellement réduit à la masse et au taux de rotation (i.e. au nombre de Rossby). Dans tout le reste de ce chapitre, on présentera régulièrement les résultats du modèle M07R1 comme cas représentatif de tous les modèles sauf M11R1 que l'on présente séparément à cause de ses caractéristiques opposées à tous les autres modèles. On s'intéresse désormais aux lois d'échelles qui existent entre les amplitudes des écoulements à grande échelle dans nos simulations : l'amplitude ( $\Delta\Omega$ ) et l'énergie (DRKE) de la rotation différentielle, l'amplitude ( $\tilde{v}_{mc}$ ) et l'énergie (MCKE) de la circulation méridienne. On reporte également le gradient latitudinal d'entropie ( $\Delta S$ ) et de température associée ( $\Delta T$ ) puisque ces quantités sont essentielles pour comprendre le profil de rotation différentielle comme discuté dans la Section 6.5.2. On choisit de définir  $\Delta\Omega$  par l'équation (6.5), et la différence d'entropie  $\Delta S$  et de température  $\Delta T$  comme la différence à la tachocline en  $r = R_{tac}$  (car c'est à ce rayon qu'elle est maximale, cf Figure 6.14) entre  $60^\circ$  en latitude et l'équateur :

$$\Delta T = T(R_{tac}, \theta_{\ell} = 60^\circ) - T(R_{tac}, \theta_{\ell} = 0^\circ) \quad (6.8a)$$

$$\Delta S = S(R_{tac}, \theta_{\ell} = 60^\circ) - S(R_{tac}, \theta_{\ell} = 0^\circ) \quad (6.8b)$$

De même, on choisit comme valeur caractéristique de la circulation méridienne la valeur rms au milieu de la zone convective  $R_{mid} = (R_* + R_{cz})/2$  de la moyenne azimuthale et temporelle de la vitesse poloidale :

$$\tilde{v}_{mc} = \left\langle \sqrt{\langle v_r(R_{mid}, \theta) \rangle_{\phi,t}^2 + \langle v_{\theta}(R_{mid}, \theta) \rangle_{\phi,t}^2} \right\rangle^{(\theta, rms)} \quad (6.9)$$

L'ensemble de ces valeurs est donné dans la Table 6.4.

Pour un taux de rotation donné, l'énergie cinétique totale (dans le repère tournant) diminue avec la masse de l'étoile, ce qui peut sembler contradictoire. Cet effet est dû principalement au choix du



**TABLE 6.4** – Composantes de l’énergie cinétique totale KE : rotation différentielle (DRKE), convection (CKE) et circulation méridienne (MCKE) définies par les équations (5.23). On donne également une mesure de la rotation différentielle  $\Delta\Omega$  définie par l’équation (6.5), la différence de température et d’entropie  $\Delta T$  et  $\Delta S$  définies par l’équation (6.8) et la vitesse caractéristique de la circulation méridienne  $\tilde{v}_{mc}$  définie par l’équation (6.9).

Modèle	Total ( $10^6 \text{erg}$ )	DRKE ( $10^6 \text{erg}$ )	MCKE ( $10^3 \text{erg}$ )	CKE ( $10^6 \text{erg}$ )	$\Delta\Omega$ (nHz)	$\Delta T$ (K)	$\Delta S$ ( $10^3 \text{erg.K}^{-1}.\text{g}^{-1}$ )	$\tilde{v}_{mc}$ ( $\text{m.s}^{-1}$ )
M05 R1	20.7	17.3	22.4	3.30	129	2.9	0.2	0.5
M05 R3	10.5	8.3	8.3	2.11	85	2.8	0.2	0.6
M05 R5	37.9	36.1	6.4	1.74	146	12.9	0.9	0.3
M07 R1	8.8	7.18	14.1	1.64	120	2.5	0.2	1.00
M07 R3	21.2	18.9	7.3	2.30	187	13.8	1.1	0.4
M07 R5	31.8	30.3	4.2	1.54	223	27.8	2.3	0.4
M09 R1	4.59	2.56	16.6	2.01	108	8.4	0.9	2.87
M09 R3	19.4	17.4	8.7	1.97	288	57.5	5.9	1.44
M09 R5	28.6	26.6	5.5	2.02	338	94.9	9.75	1.15
M11 R1	2.74	1.0	23.7	1.75	-131	-10.2	-1.52	19.15
M11 R3	4.86	3.6	6.61	1.24	291	133.5	20.7	3.71
M11 R5	10.3	8.9	4.63	1.39	435	328.9	52.1	2.90

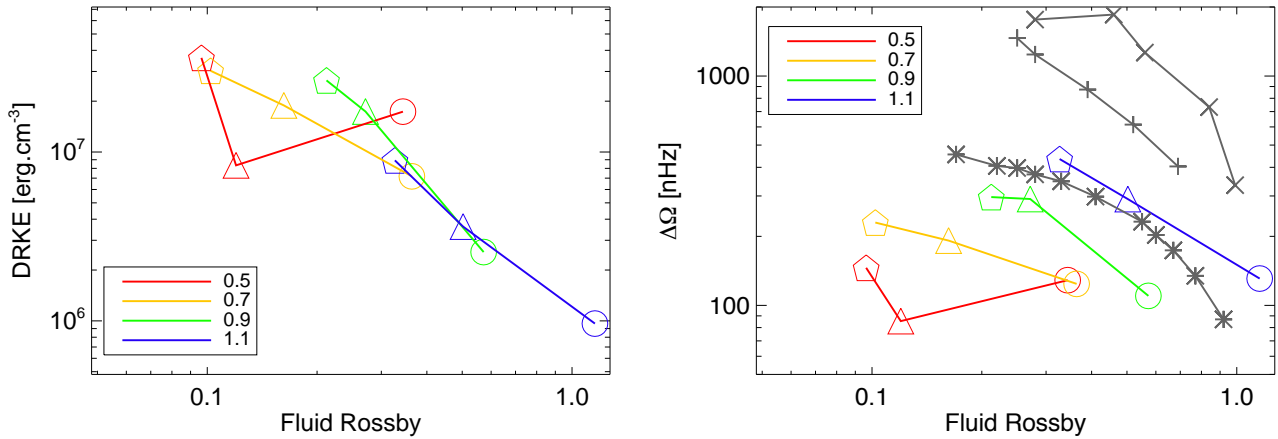
domaine de simulation car les valeurs données dans la Table 6.4 sont les valeurs intégrées sur ce domaine (et non sur l’intégralité de l’étoile). Chaque modèle possède un domaine dont la taille physique est comparable mais les modèles de masses plus élevées ont un domaine qui couvre une enveloppe externe dont la densité est beaucoup plus faible (cf Table 5.1). L’énergie cinétique totale a pour principale composante l’énergie contenue dans la rotation différentielle DRKE, de 75% à basse rotation jusqu’à 95% dans les cas à hautes rotations. À nouveau, seul le modèle M11R1 se distingue par la faible contribution de DRKE (35%) à l’énergie cinétique totale. Dans ce modèle, la majorité de l’énergie est contenue dans l’énergie cinétique convective (65%) alors qu’elle est beaucoup plus faible dans les autres modèles.

On représente dans la Figure 6.13, la composante DRKE en fonction du nombre de Rossby fluide  $R_{of}$ . On voit que l’énergie DRKE ne dépend finalement que du nombre de Rossby. Plus le taux de rotation est élevée (i.e. plus  $R_{of}$  est faible), plus l’énergie cinétique est distribuée au profit de la rotation différentielle, au dépend de la circulation méridienne et de la convection. De manière analogue, on peut également voir cette tendance en remarquant que  $\Delta\Omega$  diminue avec le nombre de Rossby comme on peut le voir sur le panneau de droite de la Figure 6.13. La masse de l’étoile joue un rôle important à travers l’influence de la profondeur de la zone convective et de la vigueur des mouvements convectifs due à la luminosité croissante de l’étoile. On trouve en effet que la rotation différentielle dépend de la masse, du taux de rotation et du nombre de Rossby fluide comme :

$$\Delta\Omega = 156.0 \text{ nHz} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1.0} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_\odot} \right)^{0.47} \quad (6.10a)$$

$$= 150.3 \text{ nHz} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)^{1.85} R_{of}^{-0.52} \quad (6.10b)$$

La masse joue un rôle majeur dans l’établissement de la rotation différentielle comme on peut le voir dans l’équation (6.10a), due à l’influence croissante du tenseur de Reynolds associée aux mouvements



**FIGURE 6.13** – *A gauche* : Énergie associée à la rotation différentielle DRKE en fonction du taux du nombre de Rossby fluide  $R_{of}$  pour chaque modèle dont le code couleur et symbole est identique à la [Figure 6.2](#). *A droite* : Rotation différentielle  $\Delta\Omega$  en fonction de  $R_{of}$  pour nos modèles. Notons que l'on donne ici la valeur absolue du modèle M11R1 puisque  $\Delta\Omega < 0$ . On y inclut en gris les valeurs des étoiles de type F de masse 1.2  $M_\odot$  (symbole plus) et 1.3  $M_\odot$  (symbole croix) de [Augustson et al. \(2012\)](#) et de type G à 1.0  $M_\odot$  (symbole astérisque) de [Brown et al. \(2008\)](#).

convectifs de plus en plus forts. Ces lois sont similaires aux lois (6.11) déduites des simulations de [Augustson et al. \(2012\)](#). Les valeurs trouvées dans nos simulations suggèrent néanmoins une dépendance moins forte de chaque paramètre et en particulier de la masse.

$$\Delta\Omega = 153 \text{ nHz} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{3.9} \left( \frac{\Omega}{\Omega_\odot} \right)^{0.6} \quad (6.11a)$$

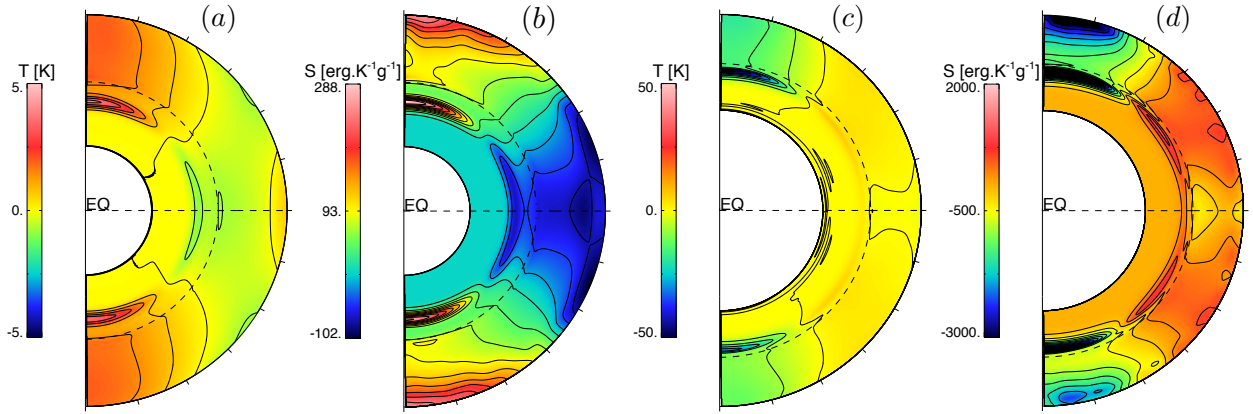
$$= 97.6 \text{ nHz} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{6.2} R_{of}^{-1.05} \quad (6.11b)$$

Le modèle M11R1 est, on le rappelle, unique puisqu'il est le seul à posséder une rotation différentielle anti-solaire. Cette différence de comportement a déjà été vue dans de multiples simulations sphériques avec ASH ([Brun and Palacios, 2009](#); [Matt et al., 2011](#)) ou cartésiennes ([Käpylä et al., 2004](#)), mais également dans des portions de sphères ([Käpylä et al., 2011b](#)), à des niveaux variés de turbulence. Cette transition entre une rotation solaire à anti-solaire se déclenche lorsque l'écoulement possède un nombre de Rossby fluide proche de 1. Autrement dit, ce changement de régime apparaît à des taux de rotation différents en fonction de la masse de l'étoile : autour de  $0.8\Omega_\odot$  pour des étoiles de 1.0  $M_\odot$  ([Brown et al., 2008](#)),  $4\Omega_\odot$  pour les étoiles de 1.2  $M_\odot$  et  $7\Omega_\odot$  pour les étoiles de 1.3  $M_\odot$  ([Augustson et al., 2012](#)). Nos simulations s'inscrivent dans la continuité de ces travaux et sont en accord avec les simulations énoncées précédemment puisque nous rapportons une rotation anti-solaire pour le modèle M11R1 dont le nombre de Rossby est  $R_{of} = 1.16$  (cf [Table 6.3](#)). Cette transition se déclenche autour de  $2\Omega_\odot$  puisque le modèle M11R3 possède une rotation solaire.

Pour pouvoir comparer nos résultats avec les observations, on convertit la loi d'échelle (6.10a) en fonction de la température effective  $T_{\text{eff}}$  qui est une quantité fournie par les observations. En supposant que  $T_{\text{eff}} \propto M^{0.5}$ , on obtient  $\Delta\Omega \propto T_{\text{eff}}^{2.0}$ . Cette dépendance n'est cependant pas aussi forte que dans les observations où  $\Delta\Omega \propto T_{\text{eff}}^{8.6}$  (cf Section 1.5). Comme le montre la différence entre les équations (6.10a) et (6.11a), la dépendance varie relativement fortement selon la gamme de masse considérée. Pour définitivement conclure sur la différence entre les observations et nos simulations, il serait nécessaire d'étendre le nombre de cas en masse et taux de rotation.

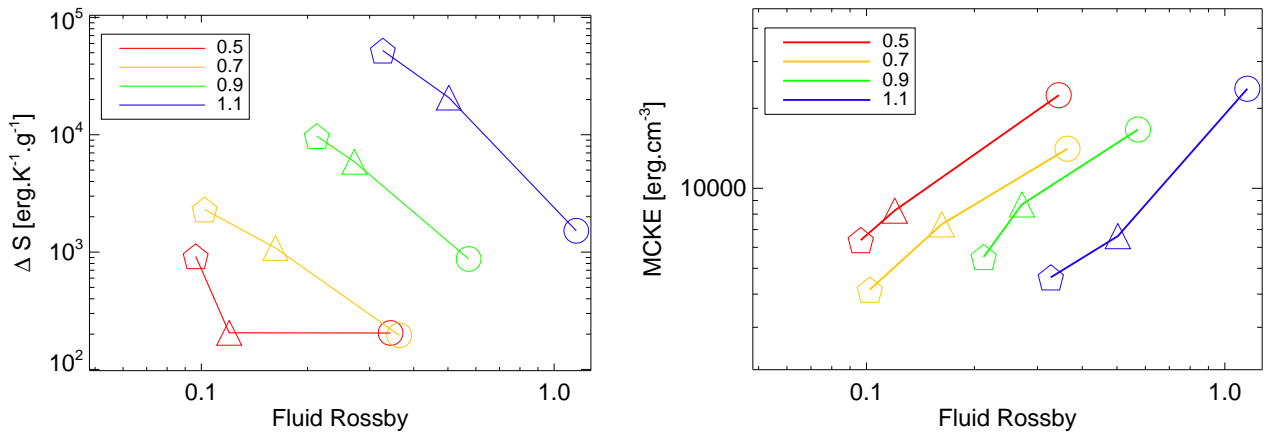
On représente dans la [Figure 6.14](#) les fluctuations d'entropie  $S(r, \theta)$  et de température  $T(r, \theta)$  par rapport à la moyenne (sur la sphère)  $\bar{S}(r)$  et  $\bar{T}(r)$  pour les modèles M07R1 et M11R1. La présence

éventuelle d'un gradient d'entropie est un ingrédient important puisqu'il peut expliquer le profil conique de la rotation différentielle comme on peut le voir dans l'équation du vent thermique classique (6.22). On abordera cette question dans la Section 6.5.2. Dans les modèles où la rotation différentielle est solaire (i.e. équateur plus rapide que les pôles), la structure latitudinale de l'entropie est toujours monotone, avec une entropie plus faible à l'équateur qu'aux pôles. Dans le cas M11R1, le gradient opposé à la base de la zone convective est en bon accord avec le profil de rotation différentielle<sup>6</sup>. Dans tous les modèles, on remarque que le contraste latitudinal est le plus intense à la tachocline, c'est-à-dire à la région de fort cisaillement de rotation (cf Figure 6.11). On représente également dans cette figure la fluctuation de température associée.



**FIGURE 6.14** – Moyenne temporelle et azimuthale de la fluctuation de température  $T$  et de l'entropie  $S$  des modèles M07R1 (panneaux a et b) et M11R1 (panneaux c et d). On remarque clairement les larges fluctuations proches de la base de la zone convective, signature de l'équilibre du vent thermique (cf Section 6.5.2).

On représente dans la Figure 6.15 la variation d'entropie  $\Delta S$  en fonction de  $R_{of}$ .



**FIGURE 6.15** – *A gauche* :  $\Delta S$  définie par l'équation (6.8b) en fonction du nombre de Rossby fluide  $R_{of}$ . Notons que l'on donne ici la valeur absolue du modèle M11R1 puisque  $\Delta S < 0$ . *A droite* : MCKE en fonction de  $R_{of}$ .

Cette variation d'entropie décroît de manière substantielle avec  $R_{of}$  mais croît avec la masse comme :

6. Rappelons que dans ce modèle les pôles tournent plus rapidement qu'à l'équateur. La variation radiale de  $\Omega$  est alors opposée au cas où la rotation est solaire.

$$\Delta S = 1.57 \times 10^3 \text{ K} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{4.6} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_\odot} \right)^{1.5} \quad (6.12a)$$

$$= 1.55 \times 10^3 \text{ K} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{7.1} R_{\text{of}}^{-1.6} \quad (6.12b)$$

Enfin, on représente dans le panneau de droite de la [Figure 6.15](#), l'énergie cinétique contenue dans la circulation méridienne en fonction de  $R_{\text{of}}$ . Nous confirmons les résultats de [Brown et al. \(2008\)](#) selon lesquels l'amplitude de la circulation méridienne diminue avec le taux de rotation, ce qui est un élément essentiel pour la compréhension des modèles de Babcock Leighton dans l'approche dynamo champ moyen ([Jouve et al., 2010a](#)) comme on l'a vu dans le [Chapitre 3](#). A faible taux de rotation, l'énergie cinétique de la convection CKE est comparable à l'énergie contenue dans la rotation différentielle DRKE. Plus le taux de rotation augmente, plus DRKE augmente et devient la composante dominante de l'énergie cinétique totale au dépend de CKE. Au contraire, MCKE est toujours négligeable et décroît à la fois en amplitude mais également en fraction de l'énergie totale. De même que pour  $\Delta\Omega$  et  $\Delta T$ , l'énergie MCKE dépend de la masse et du taux de rotation comme :

$$\text{MCKE} = 1.8 \times 10^4 \text{ erg.cm}^{-3} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-0.14} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_\odot} \right)^{-0.8} \quad (6.13a)$$

$$= 2.1 \times 10^4 \text{ erg.cm}^{-3} \left( \frac{M}{M_\odot} \right)^{-1.8} R_{\text{of}}^{1.0} \quad (6.13b)$$

## 6.5 Maintien des écoulements moyens

### 6.5.1 Transport de moment cinétique

Dans l'ensemble de nos modèles, nous avons choisi des conditions limites sans couple au bord interne et externe de notre domaine de résolution. Ainsi, le moment cinétique total est conservé. On souhaite ici identifier les processus physiques responsables du transport du moment cinétique, et par conséquent de la rotation différentielle dans la zone convective, mais aussi du couplage avec la zone radiative. Nous souhaitons donc nous intéresser en particulier à la composante  $z$  du moment cinétique  $\mathcal{L}$  pour comprendre comment est maintenue la rotation différentielle dont la vitesse est  $v_\phi = r \sin \theta \Omega$ . Autrement dit, on s'intéresse à la composante  $\phi$  de l'équation de Navier Stokes. On peut alors mettre l'équation de Navier Stokes ([2.14](#)) dans le cas hydrodynamique, sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F} = 0 \quad (6.14)$$

où  $\mathcal{F}$  est la somme vectorielle des flux des différents processus physiques contribuant au moment cinétique : la circulation méridienne, le tenseur de Reynolds et la viscosité, et où l'on définit la composante  $z$  du moment cinétique  $\mathcal{L}$  par :

$$\mathcal{L} = \bar{\rho} \sin \theta (\Omega_0 r \sin \theta + \langle v_\phi \rangle) \quad (6.15)$$

En supposant que l'on a atteint l'état stationnaire, on peut alors réécrire l'équation ([6.14](#)) en regroupant les termes qui contribuent au flux de moment cinétique radial moyen  $\mathcal{F}_r$  et au flux latitudinal moyen  $\mathcal{F}_\theta$  de la même façon que dans [Elliott et al. \(2000\)](#) et [Brun and Toomre \(2002\)](#) :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \mathcal{F}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta \mathcal{F}_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (6.16)$$

où l'on a défini les flux radial et latitudinal par :

$$\mathcal{F}_r = \bar{\rho} r \sin \theta \left[ \underbrace{-\nu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\langle v_\phi \rangle}{r} \right)}_{\text{VD}} + \underbrace{\langle v'_r v'_\phi \rangle}_{\text{RS}} + \underbrace{\langle v_r \rangle (\langle v_\phi \rangle + \Omega_0 r \sin \theta)}_{\text{MC}} \right] \quad (6.17a)$$

$$\mathcal{F}_\theta = \bar{\rho} r \sin \theta \left[ \underbrace{-\nu \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\langle v_\phi \rangle}{\sin \theta} \right)}_{\text{VD}} + \underbrace{\langle v'_\theta v'_\phi \rangle}_{\text{RS}} + \underbrace{\langle v_\theta \rangle (\langle v_\phi \rangle + \Omega_0 r \sin \theta)}_{\text{MC}} \right] \quad (6.17b)$$

Dans les expressions 6.17, les premiers termes dans les crochets correspondent aux flux de moment cinétique dus à la viscosité (que l'on dénote par  $\mathcal{F}_r^{VD}$  et  $\mathcal{F}_\theta^{VD}$ ), les seconds au transport par tenseur de Reynolds ( $\mathcal{F}_r^{RS}$  et  $\mathcal{F}_\theta^{RS}$ ), et le dernier au transport par la circulation méridienne ( $\mathcal{F}_r^{MC}$  et  $\mathcal{F}_\theta^{MC}$ ). Le tenseur de Reynolds est associé aux corrélations des fluctuations de vitesse telles que  $\langle v'_r v'_\phi \rangle$ , qui ont pour origine les inclinaisons organisées des structures convectives, en particulier dans les écoulements descendants (e.g. Brummell et al., 1998; Miesch et al., 2000). Dans la Figure 6.16, on montre les différentes contributions de chaque processus physique aux flux  $\mathcal{F}_r$  et  $\mathcal{F}_\theta$ , après les avoir intégrés le long de la colatitude  $\theta$  et du rayon  $r$  respectivement, pour les modèles M07R1 et M11R1 comme cas représentatifs. On en déduit alors le flux net à travers les coquilles sphériques en fonction du rayon, et à travers les cônes en fonction de la latitude (Brun and Toomre, 2002) :

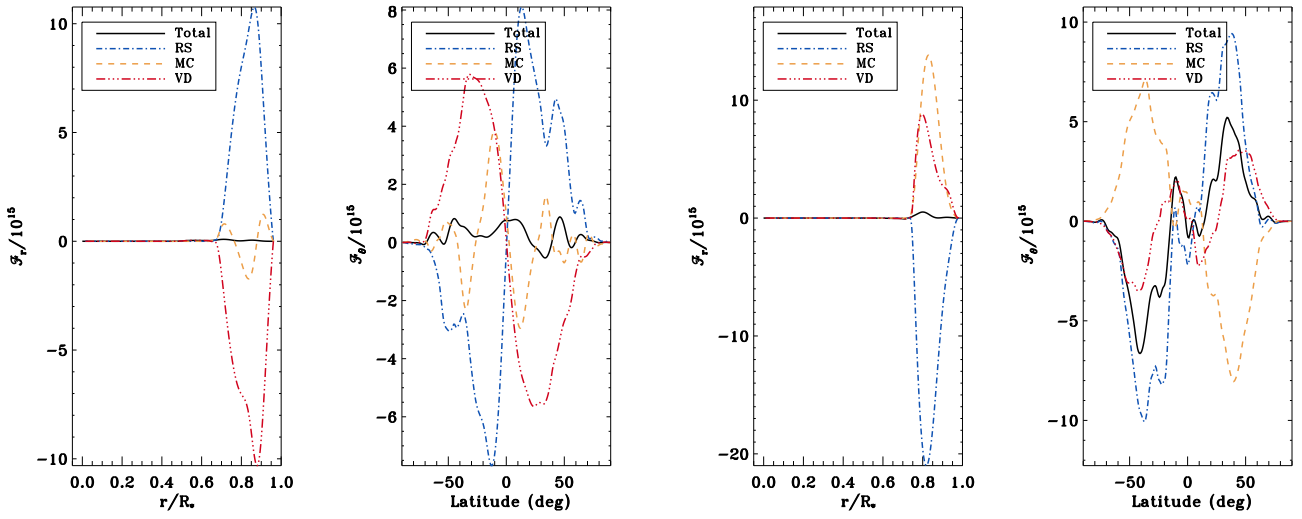
$$I_r(r) = \int_0^\pi \mathcal{F}_r(r, \theta) r^2 \sin \theta d\theta \quad (6.18a)$$

$$I_\theta(\theta) = \int_{r_{\text{bot}}}^{r_{\text{top}}} \mathcal{F}_\theta(r, \theta) r \sin \theta dr \quad (6.18b)$$

On peut alors identifier à nouveau dans chaque cas la contribution de la viscosité (VD), du tenseur de Reynolds (RS) et de la circulation méridienne (MC). Cette représentation permet d'apprécier le sens et l'amplitude de chaque processus physique transportant le moment cinétique. Lorsque  $\mathcal{F}_r^i < 0$ , cela signifie que le processus  $i$  transporte le moment cinétique vers le centre, alors que  $\mathcal{F}_r^i > 0$  le transporte vers la surface. De même,  $\mathcal{F}_\theta^i > 0$  signifie que le processus  $i$  transporte le moment cinétique dans le sens  $+\hat{\mathbf{e}}_\theta$  (i.e. du nord vers le sud), et dans le sens contraire lorsque  $\mathcal{F}_\theta^i < 0$ . On choisit de représenter dans la Figure 6.16 les processus de transport de moment cinétique du modèle M07R1 comme cas représentatif de l'ensemble des simulations. Seul, à nouveau, le modèle M11R1 se distingue en montrant des caractéristiques opposées aux autres modèles.

On s'intéresse tout d'abord au flux radial du modèle M07R1. On remarque tout d'abord que les échanges de moment cinétique ont principalement lieu dans la zone convective, alors que dans la zone radiative, les échanges y sont négligeables. Le flux visqueux  $\mathcal{F}_r^{VD}$  est négatif (par simplicité, nous oublierons la notation I dans cette section), et transporte donc le moment cinétique vers le cœur de l'étoile. On s'attend effectivement à ce que ce flux soit négatif car la viscosité agit toujours de manière opposée au gradient radial de  $\Omega$  comme on peut le voir dans la définition de  $\mathcal{F}_r^{VD}$  dans l'équation (6.17a). La circulation méridienne n'a au contraire que peu d'effet de transport. Les trois termes se compensent puisque l'on a atteint l'état stationnaire, i.e. sans transport net de moment cinétique. Au contraire, le modèle M11R1 montre des caractéristiques aux antipodes de celles décrites précédemment. Le tenseur de Reynolds transporte le moment cinétique vers le cœur de l'étoile alors que la viscosité et la circulation méridienne (qui ont des amplitudes comparables) s'opposent à ce transport.

On s'intéresse maintenant au flux latitudinal du modèle M07R1. Les composantes de ce dernier montrent des variations bien plus complexes que dans la direction radiale et des variations plus abruptes



**FIGURE 6.16** – Moyenne latitudinale du flux de moment cinétique  $\mathcal{F}_r$ ,  $I_r$  (à gauche de chaque paire de panneaux) et moyenne radiale du flux de moment cinétique  $\mathcal{F}_\theta$ ,  $I_\theta$  pour les modèles M07R1 (2 panneaux de gauche) et M11R1 (2 panneaux de droite). Les flux ont été décomposés en chaque processus physique : viscosité (rouge), tenseur de Reynolds (bleu) et circulation méridienne (jaune). Les traits pleins représentent le flux total et permettent d’apprécier le degré de stationnarité atteint dans nos modèles. Les valeurs positives représentent un flux radial dirigé vers la surface et un flux latitudinal dirigé du nord vers le sud. Chaque flux a été moyenné sur une période de 300 jours.

en fonction de la latitude. Ceci provient de l’intrication des différents termes contribuant au transport. Le tenseur de Reynolds est à nouveau le processus dominant et transporte le moment cinétique vers l’équateur ( $\mathcal{F}_\theta^{RS} < 0$  dans l’hémisphère sud et  $\mathcal{F}_\theta^{RS} > 0$  dans l’hémisphère nord). Le flux visqueux, de même que pour la composante radiale est de signe opposé au gradient latitudinal de  $\Omega$  comme on peut le voir dans l’équation (6.17b). Il a donc une valeur négative dans l’hémisphère nord et est antisymétrique par rapport à l’équateur. Il agit ainsi dans le sens opposé au tenseur de Reynolds en transportant le moment cinétique vers les pôles. La circulation méridienne bien qu’ayant une amplitude comparable aux autres processus possède une variation latitudinale plus complexe, signature de la complexité des cellules de circulation montrées dans la Figure 6.12. Le modèle M11R1, bien que pas totalement stationnaire au moment de l’écriture de ce manuscrit, montre des caractéristiques clairement distincts des autres modèles. C’est cette fois la circulation méridienne qui transporte le moment cinétique vers les pôles grâce à sa structure unicellulaire. Enfin, le flux visqueux, toujours en vertu de sa définition, doit transporter le moment cinétique vers l’équateur comme on peut le voir dans le panneau droit de la Figure 6.16.

### 6.5.2 Balance de vent thermique

La convection influencée par la rotation peut mener à un transport thermique latitudinal en plus du transport radial, provoquant des gradients latitudinaux de température et d’entropie. Dans ces conditions, les surfaces de densité constante et de pression constante ne vont pas coïncider, résultant en la baroclinité par rapport à l’équation de la vorticité (cf Annexe D). Un gradient thermique peut alors résulter en un profil de rotation non cylindrique comme celui observé dans le Soleil. Un tel profil est un écart à la contrainte de Taylor Proudman (Fearn, 1998; Durney, 1999; Brun, 2005; Brun and Palacios, 2009). Pour comprendre quels sont les processus physiques responsables de ce profil, on peut regarder l’équation du vent thermique qui résulte de l’équation de la vorticité (cf Annexe D). Rappelons tout d’abord l’équation générale de la vorticité :



$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\omega_{\mathbf{a}} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_{\mathbf{a}} - \omega_{\mathbf{a}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \nabla \bar{\rho} \nabla P - \nabla \times \left( \frac{\rho g}{\bar{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{r}} \right) - \nabla \times \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \right) \quad (6.19)$$

où l'on a défini  $\omega_{\mathbf{a}} = \nabla \times \mathbf{v} + 2\Omega_0$  la vorticité absolue et  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  la vorticité dans le référentiel tournant. Si l'on prend la moyenne sur la longitude et le temps de la composante longitudinale de l'équation de la vorticité, et en supposant que l'on est dans l'état stationnaire, on obtient l'équation d'équilibre dans le plan méridien :

$$\begin{aligned} 2\Omega_0 \frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial z} = & \underbrace{- \left\langle (\omega_{\mathbf{a}} \cdot \nabla) v_\phi - \frac{\omega_\phi v_r}{r} - \frac{\omega_\phi v_\theta \cot \theta}{r} \right\rangle}_{\text{étirement}} + \underbrace{\left\langle (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_\phi + \frac{v_\phi \omega_r}{r} + \frac{v_\phi \omega_\theta \cot \theta}{r} \right\rangle}_{\text{advection}} \\ & \underbrace{- \langle \omega_\phi v_r \rangle \frac{d \ln \bar{\rho}}{dr}}_{\text{compressibilité}} + \underbrace{\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \langle \mathcal{A}_\theta \rangle) - \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \mathcal{A}_r \rangle \right]}_{\text{viscosité}} + \underbrace{\frac{g}{rc_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta} + \frac{1}{r \bar{\rho} c_p} \frac{d \bar{S}}{dr} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \theta}}_{\text{baroclinicité}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

où l'on a défini  $\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$  et

$$\langle \mathcal{A}_r \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}} \left\langle \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathcal{D}_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \mathcal{D}_{\theta r})}{\partial \theta} - \frac{\mathcal{D}_{\theta\theta} + \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right] \right\rangle \quad (6.21a)$$

$$\langle \mathcal{A}_\theta \rangle = \frac{1}{\bar{\rho}} \left\langle \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \mathcal{D}_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \mathcal{D}_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{D}_{\theta r} - \cot \theta \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right] \right\rangle \quad (6.21b)$$

Dans l'équation (6.20), on identifie plusieurs termes :

1. Étirement : décrit l'étirement et l'inclinaison de la vorticité dûs aux gradients de vitesse.
2. Advection : décrit l'advection de la vorticité par l'écoulement.
3. Compressibilité : décrit le changement de vorticité due à la compression, notamment dans les vortex à la jonction des écoulements convectifs descendants, au sein desquels la vorticité est intensifiée.
4.  $\frac{g}{rc_p} \frac{\partial \langle S \rangle}{\partial \theta}$  est la composante dominante du terme barocline lorsque la stratification est quasiment adiabatique.
5.  $\frac{1}{r \bar{\rho} c_p} \frac{d \bar{S}}{dr} \frac{\partial \langle P \rangle}{\partial \theta}$  représente le forçage barocline venant d'un gradient radial d'entropie.
6. Viscosité : diffusion visqueuse de la vorticité.

Dans le cas où la zone convective est en équilibre adiabatique et hydrostatique, où le nombre de Rossby fluide  $R_{of} \ll 1$ , et où l'on néglige la viscosité, l'équation (6.20) devient :

$$\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 rc_p} \frac{\partial S}{\partial \theta} \quad (6.22)$$

Il s'agit de l'équation de vent thermique dite "classique" selon laquelle la baroclinicité suffit à briser la contrainte de Taylor Proudman. Nous analysons maintenant nos simulations dans le cas le plus général et évaluons quelle importance possède chaque terme de l'équation de la vorticité. Dans la Figure 6.17, on représente la partie gauche (lhs) et les différentes composantes de la partie droite (rhs) de l'équation (6.20) pour le modèle M07R1. On voit clairement que la somme des termes de droite est très proche de lhs, signifiant que l'état stationnaire est globalement atteint sur la période de temps représentée (environ 10 périodes de rotation solaire). Un échantillonnage plus court dans le temps montre généralement un équilibre moins prononcé, alors qu'une moyenne plus longue ne change



pas qualitativement la structure ou l'amplitude des différents termes. La décomposition détaillée de l'équation (6.20) nous permet d'identifier où et comment chaque terme contribue. Tout d'abord, le terme barocline est celui qui contribue le plus dans l'ensemble de la zone convective comme cela a été trouvé par Brun and Toomre (2002), Miesch et al. (2006) et Brun et al. (2011), mais il est également le principal processus à agir dans la région de fort cisaillement, i.e. la tachocline<sup>7</sup> (cf Figure 6.11). Cette région coïncide avec les régions de fortes fluctuations de température et d'entropie (cf Figure 6.14). Les termes d'advection et d'étirement contribuent faiblement à l'équilibre global, que ce soit dans l'ensemble de la zone convective ou dans la zone radiative, sauf au bord externe du domaine sans lesquels l'équilibre ne serait pas aussi bien réalisé. Contrairement au terme barocline, ils ne montrent pas de structure à grande échelle, ni un quelconque signe dominant. La faiblesse de ces termes (par rapport au terme barocline) est attendue vu que  $R_{of} < 1$ , bien qu'ils gagnent en importance avec la masse. Même dans le cas M11R1 qui possède le nombre de Rossby le plus élevé, ces termes ne contribuent que pour quelques pourcents à l'équilibre global. Enfin, le terme visqueux contribue de manière significative dans une fine couche proche du bord externe de notre domaine de résolution, là où  $\Omega$  possède un cisaillement radial plus élevé, mais aussi proche de la base de la zone convective où le profil de rotation transite vers l'état de rotation solide. On peut conclure que l'équation (6.22) n'est que partiellement satisfaite dans l'ensemble de la zone convective. Les termes d'advection et d'étirement, ainsi que la viscosité continuent de contribuer à l'équilibre du vent thermique complet (6.19), et ce, de manière croissante avec la masse, puisque la condition  $R_o \ll 1$  est de moins en moins satisfaite.

En présence d'un gradient latitudinal d'entropie, on a vu qu'il était possible de briser la contrainte de Taylor-Proudman. On se demande alors pourquoi certains modèles tels que M05R3 et M05R5 montrent un profil de rotation cylindrique alors qu'ils possèdent un tel gradient à leur tachocline. Il convient alors de comparer la variation relative  $\frac{1}{\Omega_0} \frac{\partial v_\phi}{\partial z}$  pour déterminer si ce changement est significatif. Nous trouvons en effet que ce terme est plus faible d'au moins un facteur 3 entre les modèles dont le profil est conique et ceux dont le profil est cylindrique. Dans ce cas, le terme barocline ne suffit pas à compenser la circulation méridienne qui résulte de la différence entre la somme des termes advectifs et de viscosité.

## 6.6 Pénétration des plumes convectives

Dans cette section, nous cherchons à quantifier les caractéristiques de la pénétration convective et à mesurer leur variation en fonction de la masse et du taux de rotation. Dans la Figure 6.18, on représente le flux radial d'enthalpie définie par :

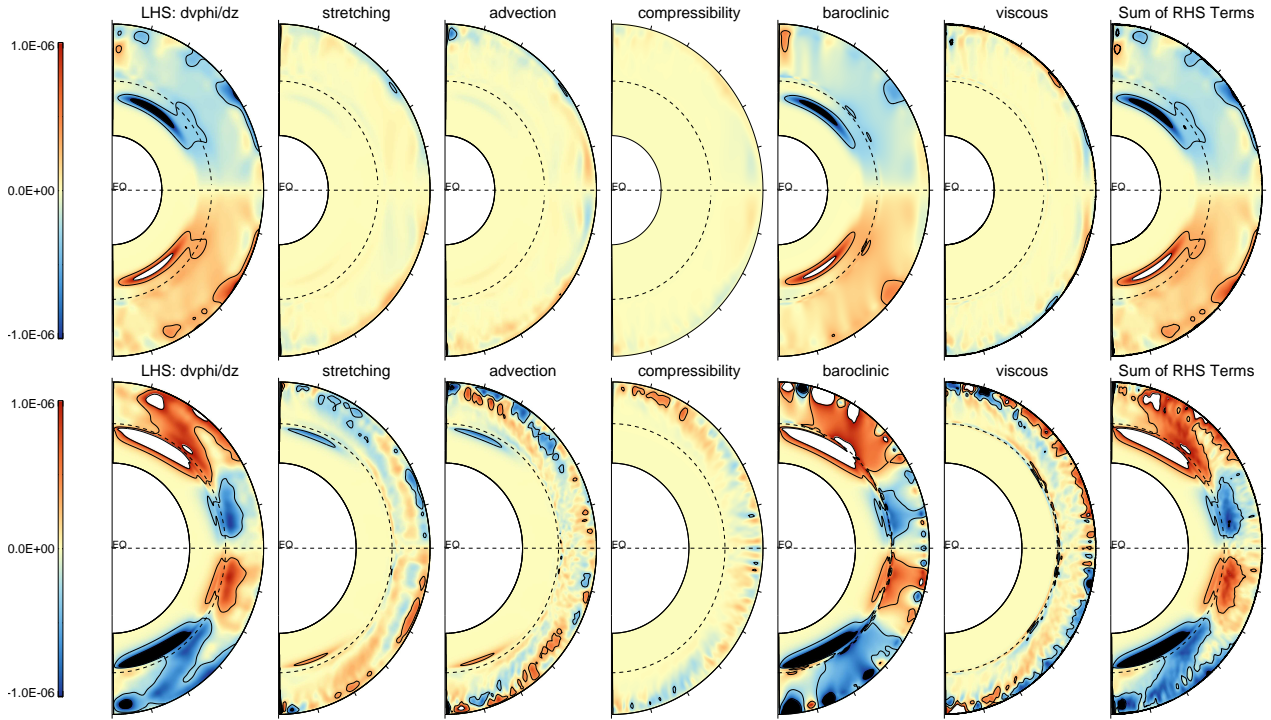
$$F_{en} = c_p \rho_{tot} v_r (T - \bar{T}) \quad (6.23)$$

Dans la zone convective, les écoulements ascendants transportent la chaleur vers la surface. Ils sont donc caractérisés par  $v_r > 0$  et  $(T - \bar{T}) > 0$  car dans une zone superadiabatique le déplacement apporte de la matière qui est plus chaude que son environnement<sup>8</sup>. Pour la même raison, les écoulements descendants sont caractérisés par  $v_r < 0$  et  $(T - \bar{T}) < 0$ . Dans les deux cas, la convection a donc un flux d'enthalpie radial positif.

Cependant les plumes descendantes ne vont pas simplement s'arrêter à la base de la zone convective, mais vont pénétrer dans la zone radiative à cause de leur inertie. C'est le phénomène d'overshoot décrit dans la Section 6.1. Dans cette région, la corrélation entre la vitesse radiale et la fluctuation de température est inversée à cause de la transition rapide entre la région superadiabatique (la zone

7. Notons que cette région n'est pas superposée à la position de la BCZ fournie par le code 1D CESAM à cause de la pénétration de la convection, du choix du profil de viscosité et de la diffusion de la tachocline, comme discuté dans la Section 6.4.1.

8. Ceci est la définition même d'une zone convectivement instable au vue du critère de Schwarzschild.

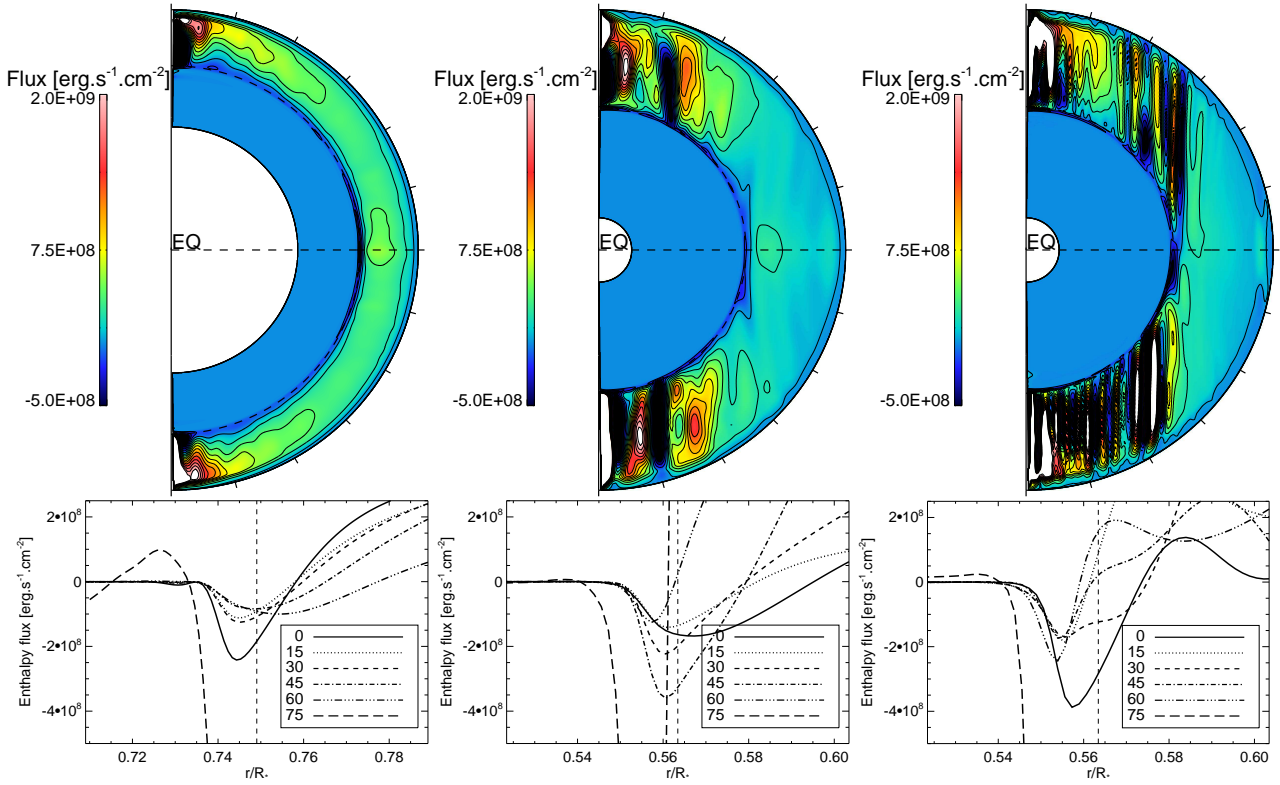


**FIGURE 6.17** – Composantes des termes de l’équation du vent thermique (6.20), moyennées sur l’azimuthe et sur une dizaine de périodes de rotation solaires pour le modèle M07R1 (*en haut*) et M11R1 (*en bas*). De gauche à droite :  $\frac{\partial \langle v_\phi \rangle}{\partial z}$ , l’étirement et l’advection de la vorticité, la compressibilité, les effets baroclines, le tenseur visqueux et la somme des termes du membre de droite (tous les termes rhs ont été divisées par  $2\Omega_0$ ). Le code couleur est maintenu constant pour chaque panneau et sature à  $\pm 1.0 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ , où le rouge représente les valeurs positives. Le cercle en tirets matérialise la position de la BCZ donnée par le code 1D CESAM.

convective) et subiabatique (la zone radiative). Alors qu’elles traversent cette transition, les plumes convectives sont décélérées à cause de la force de flottaison avant de perdre leur cohérence à cause de la diffusion thermique. Comme la profondeur et l’amplitude de l’overshoot dépendent de la stratification de la zone radiative, nos simulations sont de ce point de vue relativement réalistes et peuvent être comparées aux résultats obtenues par Brun et al. (2011).

Les propriétés de la zone d’overshoot sont en partie influencées par le nombre de Péclet ( $P_e$ ) de chaque plume individuelle (Zahn, 1992; Brummell et al., 2002; Browning et al., 2004; Rempel, 2004; Rogers and Glatzmaier, 2006). De faibles valeurs de  $P_e$  donnent lieu à ce que l’on qualifie d’overshoot convectif, au sens où la stratification reste subadiabatique malgré la perturbation provoquée par les plumes. Au contraire, des valeurs de  $P_e$  élevées assurent un mélange efficace de telle sorte que la stratification sous la zone convective devient quasiment adiabatique (i.e.  $\frac{d\bar{S}}{dr} \sim 0$ ) sur une profondeur qui s’enfonce alors progressivement dans le temps. C’est ce qu’on appelle la pénétration convective (Zahn, 1991).   cause de la forte valeur de diffusivité thermique utilisée,  $P_e$  est bien inférieure dans ces simulations à la valeur réelle. On s’attend alors plutôt à observer le phénomène d’overshoot plutôt que de la pénétration convective, ce qui est effectivement le cas car la région sous la base de la zone convective reste subadiabatique et ne bouge pas dans le temps (cf Figure 6.4).

Les propriétés du flux d’enthalpie et de l’overshoot ne sont cependant pas uniformes en latitude comme on peut le voir sur la Figure 6.18 mais montrent une dépendance spatiale variée en fonction du nombre de Rossby  $R_o$ . On choisit de montrer les modèles M11R1, M05R1 et M05R5 pour mettre en avant la variation de  $F_{en}$  sur toute la gamme de  $R_o$ . Le maximum du flux d’enthalpie est atteint dans la région proche des pôles au milieu de la zone convective et montre un minimum local   la base de la zone



**FIGURE 6.18** – Moyenne azimuthale et temporelle du flux radial d'enthalpie pour le modèle M11R1, M05R1 et M05R5 de gauche à droite. Dans les panneaux supérieurs, on montre en contours et couleur le plan méridien. Dans les panneaux inférieurs, on montre une coupe radiale à plusieurs latitudes agrandie autour de la base de la zone convective. La position de cette dernière est donnée par une ligne en tirets (circulaire sur les plans méridiens et vertical sur la coupe radiale). On remarque clairement un flux négatif à la base de la zone convective (en bleu foncé), signature de la zone d'overshoot des plumes convectives.

convective comme expliqué précédemment. Cependant, l'amplitude  $F_{en}$  n'est pas monotone en fonction de la latitude et montre des structures complexes avec une alternance entre des régions où  $F_{en} > 0$  et  $F_{en} < 0$ , particulièrement à l'intérieur du cylindre tangent. À travers l'ensemble de nos modèles, nous trouvons que cette fragmentation s'accroît avec le nombre de Rossby. Les agrandissements autour de la base de la zone convective (panneaux inférieurs de la Figure 6.18) montrent que la zone d'overshoot est également affectée car à la fois leur amplitude et épaisseur change avec la masse et le taux de rotation. Pour évaluer l'extension de la zone d'overshoot  $d_{ov}$ , plusieurs possibilités existent. De la même façon que dans Brun et al. (2011), on définit  $d_{ov}$  par :

$$d_{ov} = R_{cz} - r_o \quad (6.24)$$

où  $r_o$  est le rayon en dessous duquel le flux radial d'enthalpie  $F_{en}$  chute à 1% de son minimum négatif (avec  $r_o < R_{cz}$ ). On donne alors dans la Table 6.5 la position  $r_o$  et l'épaisseur moyenne  $d_{ov}$  pour les 3 cas présentés dans la Figure 6.18.

En conclusion, les plumes traversent toute la zone convective, puis pénètrent la zone radiative sur une épaisseur de l'ordre du pourcent avant de se dissiper par diffusion thermique. Le flux d'enthalpie transportée par ces plumes dépend à la fois de la latitude mais aussi du taux de rotation. Pour les étoiles en rotation lente, le flux d'enthalpie négatif juste sous la BCZ est maximal à l'équateur et décroît monotoniquement vers les pôles. Au contraire, dans les étoiles en rotation rapide, la variation

**TABLE 6.5** – Caractéristiques de la zone d’overshoot : sa position ( $r_o$ ) et son épaisseur moyenne  $d_{ov}$  en unité de rayon stellaire  $R_*$  et en Mm.

Modèle	$r_o$ ( $R_*$ )	$d_{ov}$ ( $R_*$ , Mm)
M11R1	0.737	0.012, 10.2
M05R1	0.551	0.012, 3.81
M05R5	0.547	0.016, 5.04

d’enthalpie est plus complexe due aux fortes variations agissant au sein de la zone convective. De prochaines études viendront compléter les analyses faites dans cette section.

## 6.7 Conclusion et perspectives

Dans ce Chapitre, nous avons réalisé une série de 12 simulations couvrant un espace de paramètres large incluant une variation en masse de 0.5 à 1.1  $M_\odot$  et en taux de rotation de 1 à  $5\Omega_\odot$ . Ce choix fait que ces simulations parcourent un intervalle de nombre de Rossby fluide  $R_{of}$  qui va de 0.1 à 1.2. Ces modèles incluent également une large fraction de la zone radiative approximativement égale à l’épaisseur de l’enveloppe convective, nous permettant de capturer leur couplage non linéaire et les effets associés à la présence d’une tachocline. Parmi tous nos modèles, le cas M11R1 est le seul modèle sensiblement différent des autres, due principalement au fait qu’il possède un nombre de Rossby fluide plus grand que l’unité.

La dynamique de la zone convective est similaire à celle décrite dans le Chapitre 5 et l’on retrouve la même variation de caractéristiques en fonction de la masse de l’étoile. Cependant, nous avons accès à une variété de taux de rotation différents. Il semble alors que les étoiles partageant un nombre de Rossby similaire montrent des caractéristiques convectives très proches. Plus  $R_o$  diminue (i.e. lorsque la rotation devient de plus en plus influante), plus les plumes ascendantes et descendantes ont tendance à s’aligner avec l’axe de rotation, alors qu’elle est radiale pour les nombres de Rossby les plus faibles. Lorsque  $R_{of} \lesssim 0.25$ , les modèles montrent la présence d’active nests qui ont déjà été vues et analysées dans de multiples simulations 3D à hauts taux de rotation (Ballot et al., 2007; Brown et al., 2008).

La rotation influence également la structure et l’amplitude de la circulation méridienne. Il semble que ce soit le nombre de Rossby et la masse qui en déterminent les principales caractéristiques. Plus le nombre de Rossby est faible, plus les cellules méridiennes sont fragmentées et alignées avec l’axe de rotation. Le modèle M11R1 est le seul à posséder une circulation méridienne unicellulaire orientée vers les pôles à la surface et vers l’équateur à la base de la zone convective. Elles sont dans tous les cas confinées dans l’enveloppe convective et ne pénètrent que très peu dans la zone radiative (sur une épaisseur d’environ  $0.05R_*$ ). L’énergie cinétique associée MCKE ne représente dans tous les cas qu’une faible fraction de l’énergie cinétique totale (environ 0.1 %). Pourtant, on trouve systématiquement qu’elle décroît avec la masse et le taux de rotation comme  $MCKE \propto \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-0.14} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_\odot}\right)^{-0.8}$ , ce qui confirme les résultats de Brown et al. (2008).

En comparaison aux travaux précédents qui n’ont considéré que l’enveloppe convective (e.g. Miesch et al., 2000; Brun and Toomre, 2002; Miesch et al., 2008), la présence d’une zone stable permet l’établissement d’une tachocline à l’interface entre la zone radiative et l’enveloppe convective. Le profil de rotation est sensiblement différent d’un modèle à l’autre. Dans tous les modèles (sauf M11R1), l’équateur tourne plus rapidement que les pôles, même si les simulations M05 montrent une structure en bandes avec des minima locaux en latitude. Si l’on compare les résultats de ce chapitre avec ceux du Chapitre 5, on voit que la prise en compte de la zone radiative a des effets notables sur la dynamique de

la zone convective, et en particulier sur les propriétés de la rotation différentielle comme l’ont anticipé [Rempel \(2005b\)](#) et [Miesch et al. \(2006\)](#). En effet, si l’on compare les mêmes modèles (qui sont par ailleurs essentiellement identiques), les profils de rotation différentielle sont encore plus éloignés de la cylindricité à cause de la présence d’un gradient latitudinal d’entropie à leur tachocline.

Par ailleurs, l’influence de la rotation est particulièrement importante et force la convection à s’aligner selon l’axe de rotation. L’analyse du transport de moment cinétique nous indique que le tenseur de Reynolds est le principal processus physique accélérant la surface et l’équateur. La viscosité agit en opposition à cet effet. Le modèle M11R1 est à l’opposé de cette description. Il est le seul à montrer un profil de rotation anti-solaire avec des pôles tournant plus rapidement qu’à l’équateur. Dans ce modèle, le tenseur de Reynolds agit de telle sorte à accélérer la base de la zone convective. Cependant, la circulation méridienne, grâce à sa structure unicellulaire devient un processus efficace de transport de moment cinétique en accélérant les pôles alors qu’il avait un rôle moins clair dans les autres modèles. Cependant, à  $\Omega_0 = 3\Omega_\odot$ , l’étoile à  $1.1 M_\odot$  exhibe une rotation différentielle opposée, suggérant que la transition anti-solaire à solaire se déroule en  $\Omega \simeq 2\Omega_\odot$  en accord avec les travaux de [Augustson et al. \(2012\)](#) qui prévoient une transition à  $0.8\Omega_\odot$  pour  $M = 1.0 M_\odot$  et à  $4\Omega_\odot$  pour  $M = 1.2 M_\odot$ . L’amplitude de cette rotation différentielle  $\Delta\Omega$  varie dans nos modèles comme  $\Delta\Omega \propto \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1.0} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_\odot}\right)^{0.47}$ , en accord avec les observations décrites dans la Section 1.5 compte tenu des incertitudes. Notons toutefois que la présence d’un champ magnétique tend à réduire la rotation différentielle à cause de la tension magnétique. Nos modèles hydrodynamiques surestiment donc probablement la rotation différentielle.

Enfin, nous avons montré que c’est le terme barocline qui est dominant dans l’équation du vent thermique, surtout dans la région de fort cisaillement de la rotation différentielle. Les termes d’advection, étirement et compressibilité sont négligeables puisque  $R_o \ll 1$ , bien qu’ils gagnent en importance, surtout dans le cas M11R1 dont le nombre de Rossby approche l’unité. Le terme visqueux est négligeable dans l’ensemble du domaine sauf dans une couche très proche du bord externe du domaine et à la base de la zone convective. Comme anticipé par [Rempel \(2005b\)](#) et [Miesch et al. \(2006\)](#), l’existence d’une couche subadiabatique sous l’enveloppe convective influence grandement le profil de rotation différentielle. Le transport de chaleur anisotrope et la circulation méridienne proche de la base de la zone convective contribue à un gradient latitudinal de température et d’entropie. Ce dernier permet de briser la contrainte de Taylor Proudman et résulte en un profil qui ne dépend que très peu du rayon sauf dans les modèles à faible masse où ce gradient n’est pas suffisant pour effectivement altérer le profil cylindrique.

Cette nouvelle génération de modèles vise à la fois à avoir une image complète des étoiles incluant à la fois leur enveloppe convective, mais également leur couplage non linéaire avec la zone radiative ; et couvrant un large intervalle de masse et de taux de rotation, nous permettant de comparer nos résultats avec les observations. Cependant, de nombreux aspects restent à explorer. Tout d’abord, l’analyse de la pénétration dans la zone radiative et des ondes de gravité ([Alvan et al., 2013](#)) peuvent nous permettre de mieux comprendre la dynamique de cette zone. Puis, nous avons négligé le champ magnétique qui pourtant a des effets importants sur la dynamique de la tachocline, à la fois sur l’effet dynamo, mais également sur son confinement. On s’attend alors à ce que l’ajout du magnétisme mette en jeu des couches de champ magnétique toroidaux intenses comme dans [Browning et al. \(2006\)](#) et [Ghizaru et al. \(2010\)](#). Le large spectre de masse et de taux de rotation devrait nous permettre d’explorer des conditions variées pour la génération de champ magnétique et ainsi de dégager les tendances en terme d’amplitude et de topologie à grande échelle, ce que nous aborderons dans le Chapitre 7.





Quatrième partie

## Complémentarité des différentes simulations numériques



## Vers des modèles de dynamo convective avec tachocline

## Contents

<b>7.1 Simulations 3D MHD non linéaires des dynamos stellaires</b>	<b>227</b>
7.1.1 Interactions entre la turbulence, la rotation et le magnétisme	227
7.1.2 Simulations numériques 3D de la dynamo solaire	228
7.1.3 Rubans magnétiques dans les étoiles en rotation rapide	230
<b>7.2 Description du modèle</b>	<b>231</b>
7.2.1 Approche numérique de la dynamo convective	231
7.2.2 Dépendance du seuil dynamo aux paramètres de l'écoulement	232
<b>7.3 Aspects énergétiques</b>	<b>233</b>
<b>7.4 Topologie du champ magnétique</b>	<b>234</b>
<b>7.5 Conclusion et perspectives</b>	<b>234</b>

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats préliminaires de la simulation M07R5 ( $0.7 M_{\odot}$  à  $5 \Omega_{\odot}$ ) dans lequel nous avons introduit un champ magnétique maintenu par un effet dynamo auto-cohérent avec l'hydrodynamique. Nous dresserons alors les perspectives et bénéfices apportées par la présence d'une tachocline dans les étoiles à fort taux de rotation. Ces simulations vont permettre d'étudier l'interaction entre convection, rotation et magnétisme dans le but ultime de soutenir les simulations 2D présentées dans la Partie II.

## 7.1 Simulations 3D MHD non linéaires des dynamos stellaires

### 7.1.1 Interactions entre la turbulence, la rotation et le magnétisme

Dans les deux chapitres précédents, nous avons mené des simulations numériques en 3D en résolvant l'ensemble des équations de l'hydrodynamique. Ces études nous ont aidé à mieux comprendre les propriétés convectives et les écoulements globaux des étoiles de type solaire, dans un espace de paramètres où varient à la fois la masse et le taux de rotation (cf Chapitre 5). Puis, nous avons étudié l'impact de la présence d'une tachocline sur la dynamique et la pénétration convective (cf Chapitre 6). Nous avons alors négligé jusque là les effets du champ magnétique. Pourtant, une très large majorité des étoiles de type solaire exhibent une activité magnétique dont l'énergie peut atteindre l'énergie d'équipartition <sup>1</sup>

1. Énergie à partir de laquelle l'énergie magnétique est égale à l'énergie cinétique.

dans les régions les plus magnétiquement intenses. On s'attend donc à ce que la rétroaction du champ magnétique via la force de Lorentz ait des effets notables sur l'écoulement.

De plus, les observations (e.g. [Barnes, 2003](#); [West et al., 2004, 2008](#)) semblent indiquer que les étoiles en rotation rapide sont plus actives magnétiquement que les étoiles plus lentes qui ont perdu leur moment cinétique au cours du temps via un vent stellaire magnétique ([Weber and Davis, 1967](#); [Matt and Pudritz, 2008](#)). Elles montrent même une activité magnétique cyclique avec des périodes comparables à celle du cycle d'activité solaire (cf Section 3.1). La rotation n'a pas pour seul effet d'influencer l'amplitude du champ magnétique<sup>2</sup> selon si la dynamo est en branche faible (équilibre entre la force de Lorentz et le terme d'advection) ou branche forte (équilibre entre la force de Lorentz et la force de Coriolis) ([Dormy and Soward, 2007](#)). Elle influence également sa topologie globale. De récentes observations indiquent en effet que les étoiles en rotation rapide montrent un champ magnétique toroidal dominant à leur surface [Petit et al. \(2008\)](#); [Morgenthaler et al. \(2012\)](#) comme on l'a vu dans la Section 1.6.2. La complexité des interactions non linéaires entre la turbulence, la rotation et le magnétisme ont contribué à l'émergence de simulations numériques globales sur des ordinateurs massivement parallèles incorporant ces ingrédients, avec un niveau de réalisme sans cesse amélioré.

### 7.1.2 Simulations numériques 3D de la dynamo solaire

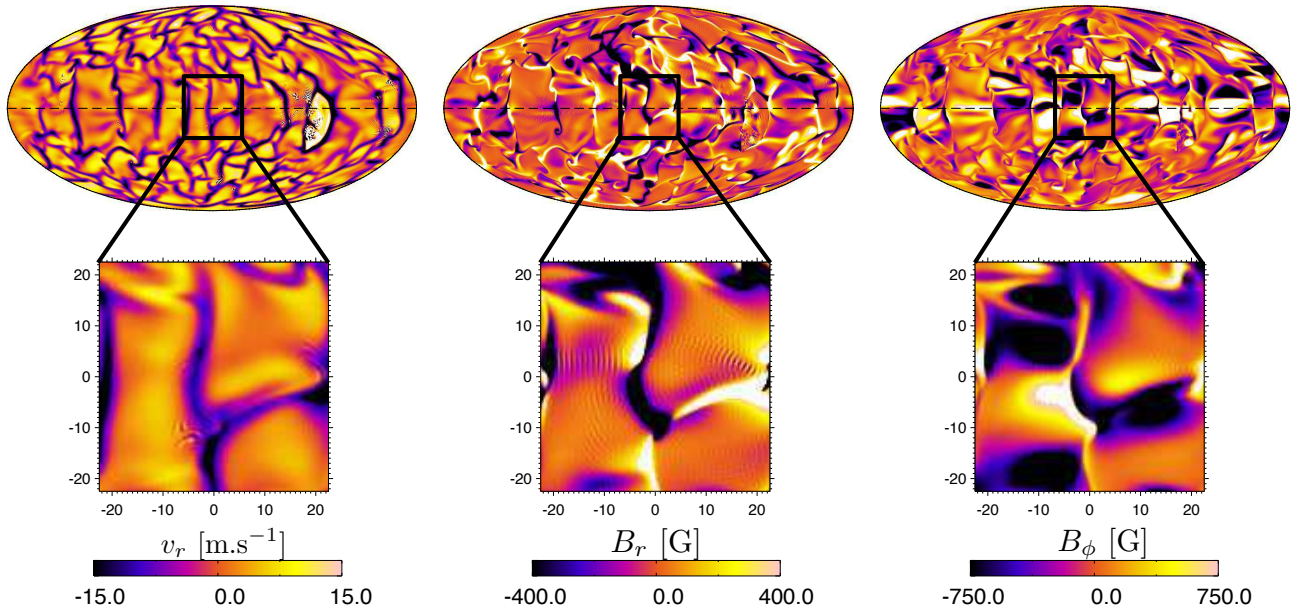
Les données très précises disponibles pour le Soleil ont motivé la réalisation de simulations numériques globales impliquant les processus MHD d'abord sur cette étoile. Les premières simulations impliquant la MHD dans des coquilles sphériques en rotation étaient relativement laminares, mais suffisamment turbulentes pour produire tout de même un effet dynamo ([Gilman and Glatzmaier, 1981](#); [Gilman, 1983](#); [Glatzmaier, 1987](#)). Puis, [Brun et al. \(2004\)](#) ont étudié l'effet dynamo réalisé par les écoulements turbulents globaux dans la zone convective solaire. Dans ces simulations, la convection caractérisée par la présence d'hélicité et produisant de la rotation différentielle, fournit tous les ingrédients nécessaires à l'établissement d'une dynamo de type  $\alpha - \Omega$ . L'énergie magnétique atteinte est de l'ordre de 7% de l'énergie cinétique. Le champ magnétique résultant est alors intimement couplé et dicté par la forme des cellules convectives. Les écoulements descendants advectent des champs de polarité opposée concentrant le champ radial  $B_r$  au sein des réseaux qu'ils forment. La convergence de ces structures magnétiques favorise la reconnection magnétique et la distorsion du champ à cause du cisaillement et de la vorticité de l'écoulement (cf [Figure 7.1](#)).

Au contraire, le champ toroidal  $B_\phi$  de surface n'est pas conf  n   dans le réseau d'écoulements descendants, mais est organisé en larges nappes qui sont étirés par la rotation différentielle. A faible latitude, il forme de larges zones uniformes de même signe entre deux écoulements descendants. Ces motifs sont confinés aux régions superficielles et ont donc une faible extension radiale. Bien que certaines structures prennent la forme de tubes de flux toroidaux, ils sont rapidement advect  s et tordus par les mouvements convectifs, et finissent par perdre leur cohérence avant de pouvoir émerger vers la surface par flottaison. L'amplitude maximale du champ magnétique est de l'ordre de  $B_\phi \simeq 4$  kG et  $B_r \simeq 2$  kG.

Dans ces simulations, le champ magnétique moyen (défini comme la moyenne sur la longitude) est cependant très faible par rapport à leurs fluctuations (ces dernières représentant 98% de l'énergie magnétique totale). Elles ne présentent pas, comme dans les observations, de structures organisées, ni de propagations systématiques, de cycles ou de renversement de polarité; mais au contraire une dépendance spatiale et temporelle complexe associée à la nature fluctuante des corrélations entre le champ de vitesse et le champ magnétique par lesquelles ce dernier est maintenu. De plus, l'énergie poloidale et toroidale fluctuantes sont comparables, suggérant que l'effet  $\Omega$  ne joue qu'un faible rôle<sup>3</sup>, bien qu'il semble contribuer à l'énergie toroidale moyenne supérieure par un facteur 3 à l'énergie poloidale moyenne. On peut alors qualifier cette dynamo comme de type  $\alpha^2 - \Omega$  plutôt que  $\alpha - \Omega$ . Le

2. bien que ce dernier sature au dessus d'un certain taux de rotation critique (cf [Figure 1.12](#))

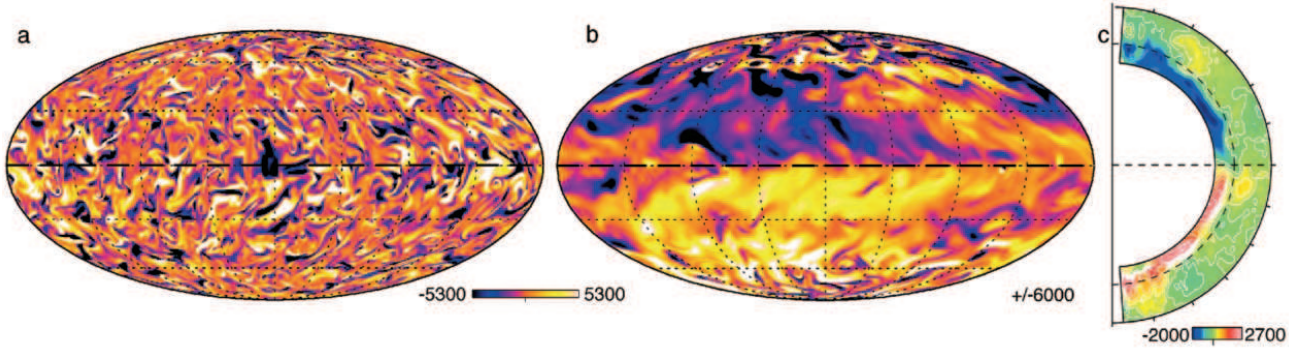
3. puisqu'il n'agit que sur la composante toroidale, cf Section 2.2.3



**FIGURE 7.1** – Projection de Mollweide de la vitesse radiale  $v_r$ , du champ radial  $B_r$  et du champ toroidal  $B_\phi$  proche de la surface. Dans les panneaux inférieurs on montre un agrandissement de  $45^\circ$  et qui s'étendent des latitudes  $10^\circ\text{N}$  à  $55^\circ\text{N}$ . Crédits : [Brun et al. \(2004\)](#).

fait que le champ magnétique soit irrégulier avec des changements de polarité sur des périodes courtes (de l'ordre de 10 temps de retournements convectifs au lieu de 110 dans le Soleil) nous fait penser que la dynamo capturée est celle qualifiée de petite échelle (cf Section 2.2.2). Dans ces simulations, la dynamo à grande échelle serait faible à cause de l'absence de la tachocline qui est un ingrédient essentiel dans la formation et structuration de larges structures magnétiques que l'on pense génératrice des caractéristiques à grande échelle et cycliques du champ magnétique solaire.

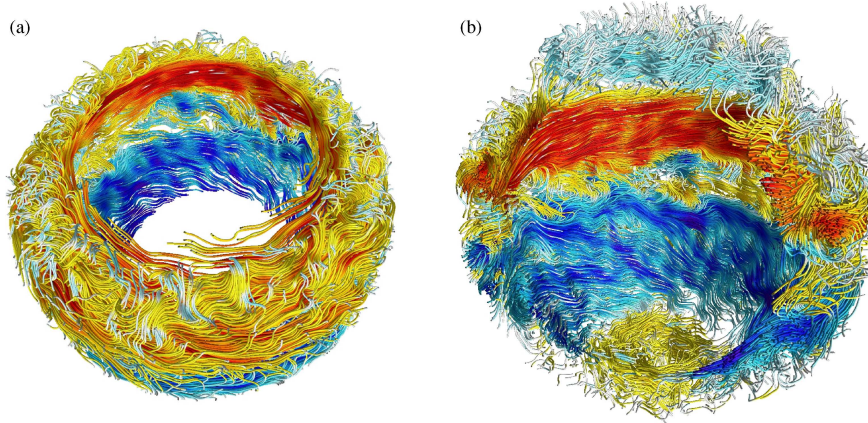
Les travaux de [Browning et al. \(2006\)](#) ont alors incorporé une tachocline en prenant en compte une partie de la zone radiative. Dans ces simulations, le champ magnétique dans la zone convective est similaire à celle décrite précédemment. Cependant, la présence du fort cisaillement à l'interface des deux zones organise le champ magnétique toroidal dans la zone stable, juste sous la base de la zone convective, dont l'amplitude est environ 10 fois supérieure à la valeur moyenne dans la zone convective (cf Figure 7.2). Alors que le champ fluctuant (i.e. non axisymétrique) domine dans l'enveloppe convective, l'énergie magnétique contenue dans le champ toroidal moyen est environ 3 fois supérieure à l'énergie magnétique fluctuante dans la zone stable. Dans cette dernière,  $B_\phi$  montre une antisymétrie claire par rapport à l'équateur, associée à un champ dipolaire poloidal. Le champ poloidal, dans les deux zones, reste stable dans le temps, contrairement aux simulations décrites précédemment où le champ fluctue en permanence. Ceci suggère que la présence d'un large réservoir de champ toroidal intense de polarité constante tend à stabiliser le champ poloidal moyen dans la zone convective. Encore plus récemment, [Ghizaru et al. \(2010\)](#), [Racine et al. \(2011\)](#) et [Käpylä et al. \(2012\)](#) ont développé des modèles selon l'approche de [Browning et al. \(2006\)](#) (convection couplée à une zone stable et imposition d'une tachocline). Ils ont pu établir des cycles magnétiques, certes plus longs que dans le Soleil (de l'ordre de 40 ans), mais ayant une évolution spatiale au cours du temps qui peut être soit constante en latitude, soit avec une tendance vers la formation d'une branche équatoriale. De réels progrès ont donc été réalisés ces 10 dernières années et nous encourageant à appliquer les mêmes techniques à d'autres étoiles.



**FIGURE 7.2** – Projection de Mollweide du champ magnétique toroidal  $B_\phi$  au milieu de la zone convective en  $r = 0.84R_\odot$  (a) et dans la zone stable sous jacente en  $r = 0.67R_\odot$  (b). Dans le panneau (c) on représente la moyenne azimuthale de  $B_\phi$  moyenné dans le temps (sur un intervalle de 220 jours) où l’on note l’organisation dans la tachocline du champ toroidal en couche magnétique. L’amplitude du champ magnétique est donnée en Gauss. Crédits : [Browning et al. \(2006\)](#).

### 7.1.3 Rubans magnétiques dans les étoiles en rotation rapide

Comme nous l’avons vu dans la Section 7.1.1, l’activité magnétique et la rotation sont intimement liées. Les étoiles en rotation rapide sont donc des objets privilégiés si l’on veut comprendre le magnétisme des étoiles. Plusieurs simulations ont déjà abordé de nombreux aspects de la dynamo sur des étoiles de masse solaire à haut taux de rotation, que l’on qualifie de Soleils jeunes<sup>4</sup> ([Brown et al., 2010](#); [Nelson et al., 2013b](#)). Dans ces simulations, le champ magnétique s’organise naturellement en rubans entrelacés au sein de la zone convective (cf [Figure 7.3](#)). Ces rubans sont des structures de champ toroidaux intenses traversant la convection.



**FIGURE 7.3** – Lignes de champ traçant les rubans magnétiques dans une étoile de masse solaire tournant à  $5\Omega_\odot$ . (a) Instantané de deux rubans autour de l’équateur. Les lignes suivent la direction du champ magnétique et la couleur représente l’amplitude et la polarité de  $B_\phi$  (rouge : positif, bleu : négatif). La vue est ici restreinte à une portion de la sphère autour de  $\pm 30^\circ$  en latitude. (b) Idem que le panneau (a) mais vue de côté pour mettre en avant la continuité du champ des régions équatoriales jusqu’aux pôles où on y distingue le reliquat d’un couronne précédente. Crédits : [Brown et al. \(2011\)](#).

Ces rubans magnétiques diffèrent significativement des tubes de champ dont la géométrie est plus simple, alors que les tubes de champ sont régulièrement utilisés dans de nombreuses théories dynamo

4. Cette appellation vient du fait que les étoiles jeunes tournent beaucoup plus rapidement que leur homologues plus âgés car ces derniers ont perdu leur moment cinétique à cause de leur vent magnétisé (cf Section 1.5).



(Cline et al., 2003; Vasil and Brummell, 2008, 2009). Ces larges structures font que l'énergie magnétique toroidale moyenne contient une fraction comparable aux fluctuations de l'énergie magnétique totale, ce qui est différent de ce qui a été trouvé précédemment dans les simulations de la zone convective seule (Brun et al., 2004), ou celles impliquant la zone radiative (Browning et al., 2006). Cependant, l'énergie moyenne poloidale reste faible (de l'ordre de 4% de l'énergie magnétique totale, elle-même représentant 10% de l'énergie totale).

La structure en profondeur de ces rubans magnétiques est révélée par la représentation volumique de la Figure 7.3. Les connexions qui relient les deux hémisphères nord et sud se produisent via les lignes de champ qui s'insinuent entre les deux rubans de polarité opposées. Ces dernières sont également connectées à la convection à haute latitude. Aux bords polaires de ces rubans, les lignes de champ se vrillent à cause de la convection fortement vorticitaire. C'est à cet endroit que le champ magnétique poloidal est généré. Les déformations des rubans sont provoquées par les forts écoulements descendants concentrant la vorticité qui advectent le champ magnétique plus profondément dans la zone convective.

Nous présentons maintenant les résultats préliminaires de simulations numériques 3D ASH développant un champ magnétique maintenu par effet dynamo, car la résolution des équations MHD et la très haute résolution requise (cf Section 7.2.2) demandent des temps de calculs encore plus importants que les simulations hydrodynamiques présentées dans le Chapitre 6. Le modèle présenté est initialisé à partir du modèle M07R5 du Chapitre 6 dans lequel on introduit un champ magnétique primordial qui va se développer par effet dynamo. Cette étoile en rotation rapide (au regard du nombre de Rossby) s'inscrit dans la continuité des travaux présentés précédemment, et en complément des études de Brown et al. (2010), Brown et al. (2011), Nelson et al. (2011), Nelson et al. (2013b) et Augustson et al. (2012). On souhaite alors explorer les effets d'un haut taux de rotation dans des étoiles dont la masse est différente de celle du Soleil pour en étudier les différences.

## 7.2 Description du modèle

### 7.2.1 Approche numérique de la dynamo convective

Dans le Chapitre 6, nous avons réalisé des simulations hydrodynamiques des intérieurs stellaires en présence d'une tachocline. On souhaite désormais y inclure les effets du champ magnétique pour étudier son interaction avec la rotation et les écoulement globaux présents dans la zone convective. Pour explorer la convection stellaire magnétisée, on utilise désormais l'approche Magnéto-Hydro-Dynamique (MHD) dont l'implémentation dans le code ASH est discutée dans Brun et al. (2004). On résout alors les équations 3D MHD dans l'approximation anélastique :

$$\nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{v}) = 0 \quad (7.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.1b)$$

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - [\nabla \bar{P} - \bar{\rho} \mathbf{g}] + \nabla \cdot \bar{\mathcal{D}} + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (7.1c)$$

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \bar{T} \frac{\partial S}{\partial t} + \bar{\rho} \bar{T} \mathbf{v} \cdot \nabla (\bar{S} + S) = \nabla \cdot [\kappa_{\text{rad}} \bar{\rho} c_p \nabla (\bar{T} + T) + \bar{\rho} \bar{T} (\kappa \nabla S + \kappa_0 \nabla \bar{S})] \\ + 2\bar{\rho} \nu \left[ e_{ij} e_{ij} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \right] + \bar{\rho} \epsilon + \frac{4\pi \eta}{c^2} \mathbf{j}^2 \end{aligned} \quad (7.1d)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad (7.1e)$$

Les conditions limites concernant l'entropie et la vitesse sont identiques à celles décrites dans la Section 6.2.1. On choisit pour le champ magnétique d'imposer une condition potentielle au bord externe, i.e. l'extérieur de l'étoile est du vide :

$$\nabla^2 \phi|_{r=R_{\text{top}}} = 0 \quad (7.2)$$

où  $\mathbf{B} = \nabla \phi$ ; et un conducteur parfait au bord interne :

$$B_r = \frac{\partial r B_\theta}{\partial r} \Big|_{r=R_{\text{bot}}} = \frac{\partial r B_\phi}{\partial r} \Big|_{r=R_{\text{bot}}} = 0 \quad (7.3)$$

On initialise le champ magnétique par un champ ( $\ell = 3, m = 2$ ) d'énergie très faible, de l'ordre de  $10^{-4}$  par rapport à l'énergie cinétique, et confiné dans la zone convective.

### 7.2.2 Dépendance du seuil dynamo aux paramètres de l'écoulement

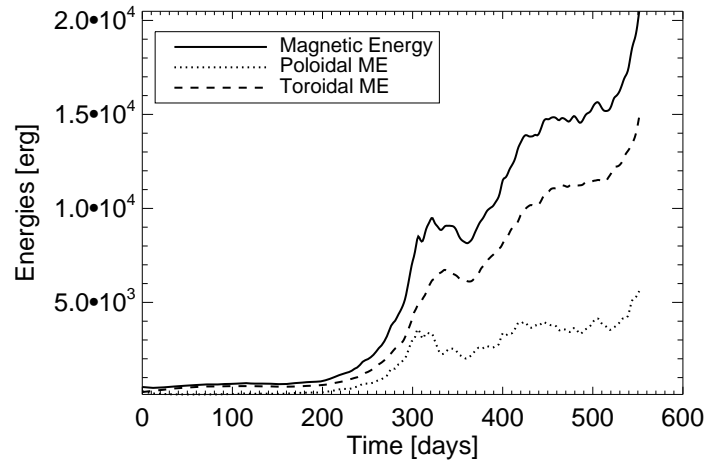
En plus de la viscosité  $\nu$  et de la diffusivité thermique  $\kappa$  décrites dans la Section 6.2.2, il est nécessaire de définir une diffusivité magnétique  $\eta$ . On choisit de prendre le même profil que celui donné par l'équation (6.2) sauf que l'on choisit comme diffusivité magnétique  $\eta_{\text{top}} = 0.5\nu_{\text{top}}$ . Autrement dit, on choisit un nombre de Prandtl magnétique  $P_m = 2$  constant dans toute le domaine de simulation.

Pour obtenir un effet dynamo, il faut que l'écoulement atteigne un nombre de Reynolds magnétique  $R_m$  supérieur à une valeur critique  $R_{m,\text{crit}}$  (cf Section 2.2.1). Les simulations de Brun et al. (2004) ont montré que  $R'_m$  (où  $R'_m$  est le nombre de Reynolds magnétique fluctuant, c'est-à-dire que l'on a retiré la composante moyenne longitudinale) devait être supérieur à environ 300 pour maintenir le champ magnétique contre sa dissipation ohmique. Pour un écoulement donné (i.e. avec un nombre de Reynolds  $R_e$  fixe), le choix du nombre de Prandtl détermine  $R_m = R_e P_m$ . Des valeurs élevées de  $P_m$  permettent donc d'avoir un nombre de Reynolds magnétique suffisamment élevé pour maintenir l'effet dynamo. Dans les étoiles en rotation rapide,  $P_m$  n'a pas besoin d'être aussi élevé que dans les étoiles en rotation lente pour 3 raisons :

1. Une rotation plus rapide tend à stabiliser la convection et requiert une viscosité et diffusivité plus faible pour déclencher la convection et ainsi maintenir une haute supercriticalité. Ceci se traduit par des vitesses convectives et donc des nombres de Reynolds fluide  $R_e$  et magnétique  $R_m$  plus élevés, même en ayant un nombre de Prandtl faible.
2. Les simulations numériques montrent que l'amplitude de la rotation différentielle augmente avec le taux de rotation comme  $\Delta\Omega \propto \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1.0} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_\odot}\right)^{0.47}$  (cf Figure 6.13). Cet écoulement à grande échelle est un ingrédient essentiel puisque c'est un large réservoir duquel la dynamo peut extraire de l'énergie. De plus, la présence d'un tel écoulement global cisailant semblerait réduire la valeur de  $R_{m,\text{crit}}$  (Hughes and Proctor, 2009).
3. Enfin,  $R_{m,\text{crit}}$  décroît lorsque l'hélicité augmente (e.g. Leorat et al., 1981), ce dernier étant généralement une fonction croissante du taux de rotation (Käpylä et al., 2009b), ce qui a été confirmé par Brown et al. (2010).

## 7.3 Aspects énergétiques

Nous présentons dans cette section l'évolution de l'énergie magnétique au cours du temps de notre simulation. Nous introduisons un champ magnétique dont l'énergie ( $\sim 10^3 \text{ erg.cm}^{-3}$ ) est très faible devant l'énergie cinétique ( $\sim 10^8 \text{ erg}$ ) pour étudier séparément la phase cinématique et celle de saturation de la dynamo. Avec  $P_m = 2$ , nous trouvons que l'instabilité dynamo se déclenche. Avec cette valeur, le nombre de Reynolds magnétique vaut  $R_m \simeq 70$  et permet marginalement de maintenir le champ magnétique contre sa dissipation ohmique. En ce sens, notre modèle ressemble au cas M2 de Brun et al. (2004).



**FIGURE 7.4** – Evolution de l'énergie magnétique totale (trait plein) et de ses composantes toroidale (tirets) et poloidale (pointillés) au cours du temps.

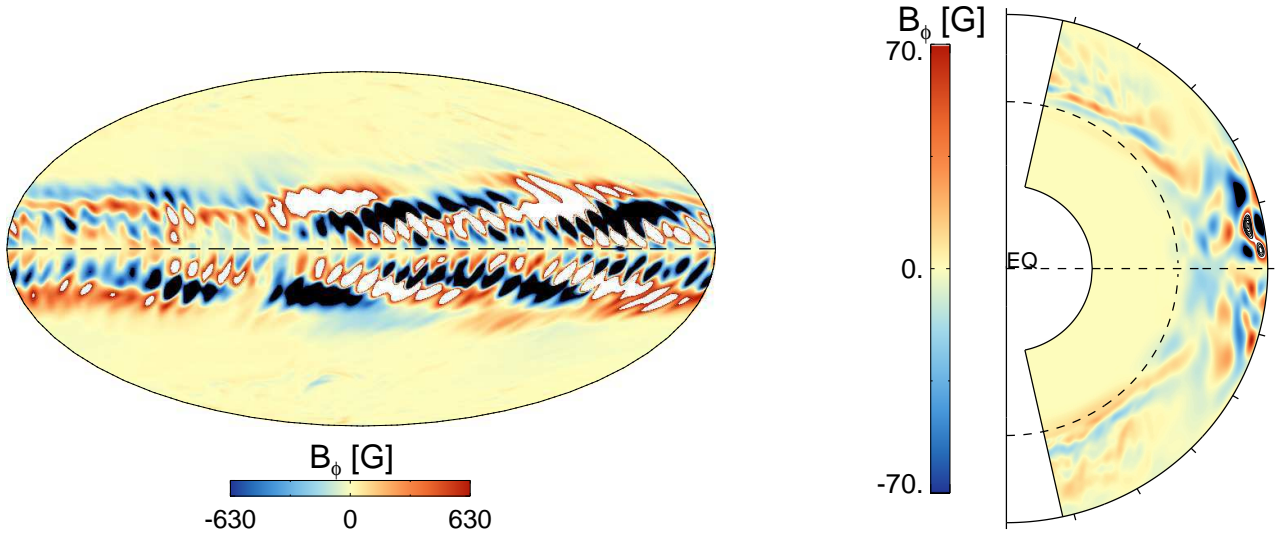
On peut se demander alors à quelle valeur va saturer l'énergie magnétique par rapport à l'énergie cinétique totale. En effet, comme on l'a vu dans la Section 7.1.3, la rotation semble jouer un rôle important sur la distribution et l'amplitude de l'énergie magnétique. Il existe en fait deux régimes dans lesquels la dynamo peut opérer. En effet, la rotation et le magnétisme, indépendamment l'un de l'autre, tendent à inhiber la convection. Cependant, si ces deux processus sont suffisamment importants, ils peuvent devenir les deux acteurs principaux régissant la dynamique. On dit alors que l'on est à l'équilibre magnétostrophique<sup>5</sup> (Chandrasekhar, 1961; Soward, 1979; Stevenson, 1979). Ceci a amené Roberts and Soward (1978) à postuler l'existence de deux régimes dynamo : faible et fort, ces deux états pouvant coexister dans un certain intervalle de paramètres (voir la revue de Roberts, 1988). Dans le cas de la branche faible, c'est le terme d'advection et la force de Lorentz qui dominent. L'énergie magnétique ne peut alors dépasser l'énergie d'équipartition. Par contre, dans les cas à très hauts taux de rotation, on peut atteindre l'équilibre magnétostrophique et le champ magnétique peut atteindre une énergie dite de superéquipartition. Le régime magnétostrophique peut être évalué grâce au nombre d'Elsasser. Une telle différence dynamo semble être détectée dans des étoiles totalement convectives (Simitev and Busse, 2009; Morin et al., 2011).

## 7.4 Topologie du champ magnétique

On représente dans la Figure 7.5 le champ magnétique longitudinale  $B_\phi$  au bout d'une centaine de jours après le début de la simulation. On voit alors que le champ magnétique commence à prendre la forme de rubans concentrés à l'équateur, même si cela est moins clair que dans la Figure 7.3. Le champ est nul dans la zone radiative. On s'attend néanmoins à la présence d'une couche de champ magnétique de l'ordre de quelques kG sous la base de la zone convective à cause de l'effet du pompage turbulent, de la même manière que dans la Figure 7.2. L'énergie magnétique, à cet instant, ne représente que 0.01% de l'énergie cinétique, bien qu'en pleine croissance. On s'attend alors à obtenir une couche magnétique sous la base de la zone convective. Le comportement du champ magnétique est donc complètement dicté par la convection et l'on peut d'ailleurs distinguer le cisaillement provoqué par les structures laminares en particulier proche de l'équateur<sup>6</sup>.

5. Cette notion est à comparer directement avec l'équilibre géostrophique dans lequel c'est le gradient de pression qui est comparable à la force de Coriolis.

6. Rappelons que la structure de la convection peut être visualisée dans la Figure 6.7.



**FIGURE 7.5** – Projection de Mollweide (à gauche) et moyenne azimuthale (à droite) de  $B_\phi$  du modèle M07R5 avec champ magnétique pendant sa phase transitoire.

## 7.5 Conclusion et perspectives

Dans ce Chapitre, nous avons présenté les résultats préliminaires d’une simulation avec un effet dynamo dans une étoile de  $0.7 M_\odot$  à un taux de rotation de  $5\Omega_\odot$ . Nous trouvons qu’il est nécessaire d’avoir un nombre de Prandtl magnétique supérieure à  $P_m = 2$  pour obtenir une croissance marginale de l’énergie magnétique. Le champ magnétique commence à s’organiser en larges rubans entrelacés et concentrés à l’équateur, de façon similaire aux simulations de [Brown et al. \(2010\)](#). A cause de la forte rotation, on s’attend à ce que le champ magnétique extrait son énergie de la rotation différentielle, nous permettant de vérifier si le système atteint l’équilibre magnétostrophique.

Nous avons l’intention de développer ce type de simulations et de l’étendre à l’ensemble des modèles présentés dans le Chapitre 6. Ceci nous permettra à terme de comparer les caractéristiques (amplitude et topologie) du champ magnétique en fonction de la masse et du taux de rotation. Nous pourrons alors tester ces modèles face aux observations. Des études similaires ont été déjà réalisées dans le cadre de la dynamo planétaire ([Heimpel et al., 2005](#); [Christensen and Aubert, 2006](#); [Gastine et al., 2012](#); [Gissinger et al., 2012](#)). Nous pourrons alors regarder s’il y a une transition de régime.

Puis, nous ferons évoluer ces modèles suffisamment longtemps pour identifier si des cycles magnétiques émergent de l’auto organisation spontanée du champ magnétique et si la présence d’une tachocline joue un rôle significatif. Ces simulations permettront alors de compléter l’analyse faite sur des étoiles de masse solaire ([Ghizaru et al., 2010](#); [Brown et al., 2011](#); [Nelson et al., 2013b](#)).

## Contents

<b>8.1 Synthèse des résultats STELEM</b>	<b>237</b>
<b>8.2 Synthèse des résultats ASH</b>	<b>238</b>
<b>8.3 Vers une utilisation conjointe des simulations 2D et 3D</b>	<b>240</b>

Cette thèse a étudié l'origine et les caractéristiques du magnétisme des étoiles de type solaire au travers du mécanisme dit de dynamo fluide. D'un côté, nous avons étudié les caractéristiques à grande échelle du champ magnétique grâce aux simulations numériques 2D avec le code STELEM, rapide mais ne décrivant pas la convection turbulente de ces étoiles. D'un autre côté, nous avons mené des simulations en 3D avec ASH qui résout la dynamique non linéaire des étoiles de manière cohérente, mais au prix d'un temps de calcul coûteux. Nous en rappelons ici les principaux résultats.

## 8.1 Synthèse des résultats STELEM

Comme le Soleil, de nombreuses étoiles de type solaire possèdent une activité magnétique cyclique. Ceci nous permet de mettre à l'épreuve nos modèles en faisant varier les paramètres stellaires (rotation notamment) en analysant les caractéristiques à grande échelle de l'activité magnétique (cf Partie II). Dans cette optique, [Jouve et al. \(2010a\)](#) ont montré que les modèles actuels de type Babcock Leighton ne pouvaient reproduire la décroissance de la période magnétique avec le taux de rotation  $\Omega$ , sauf dans le cas d'une circulation méridienne pluricellulaire. Nous avons montré que si l'on prend en compte le mécanisme de pompage turbulent, ces modèles étaient capables de réconcilier la théorie aux observations, à condition que son amplitude  $\gamma \propto \Omega^2$  (cf Chapitre 3). Cependant, à haut taux de rotation, on a vu que les ingrédients physiques (telles que la rotation différentielle et la circulation méridienne) évoluent substantiellement. On se doit alors de prendre en compte ces modifications pour voir quels sont leurs effets sur ces résultats.

D'autre part, nous avons étendu le code STELEM en implémentant la rétroaction du champ magnétique grande échelle sur la vitesse longitudinale de l'écoulement (qui jusqu'alors était maintenu fixe dans le temps) via l'équation de Navier Stokes, c'est l'effet Malkus-Proctor (cf Chapitre 4). Ce dernier a été souvent considéré dans le cadre des dynamos  $\alpha - \Omega$  (e.g. [Covas et al., 2000](#); [Moss and Brooke, 2000](#); [Bushby, 2006](#)). Nous avons au contraire inclus cet effet dans des dynamos BL- $\Omega$  qui sont les modèles les plus favorisés à ce jour ([Dikpati and Charbonneau, 1999](#); [Chatterjee et al., 2004](#); [Jouve](#)

and Brun, 2007; Choudhuri, 2012). Prendre en compte cette rétroaction nous a permis de reproduire avec succès à la fois les caractéristiques d'un cycle magnétique solaire, mais également les variations de la rotation différentielle, les oscillations torsionnelles. Nous montrons que ces dernières sont générées directement par la force de Lorentz. Nous avons de plus montré que prendre en compte la diffusivité magnétique augmentée par la présence de la supergranulation proche de la surface permettait d'obtenir à la fois la branche polaire et équatoriale sans faire appel à un forçage thermique (Rempel, 2007).

La présence de cette non linéarité n'a pas comme seul effet de pouvoir reproduire les oscillations torsionnelles, elle ouvre également un vaste champ d'études dont on dresse ci-après un panorama :

1. nos modèles actuels supposent un profil de viscosité constant. Introduire un saut en viscosité pour garder un nombre de Prandtl magnétique  $P_m$  constant serait plus réaliste.
2. étudier les modulations et variations de parité des cycles magnétiques, en particulier dans les régimes de faible nombre de Prandtl magnétique Moss and Brooke (2000); Bushby (2006); Moss et al. (2008).
3. prendre en compte la variation des profils des écoulements globaux lorsque le taux de rotation varie comme on l'a vu dans les simulations 3D (cf Chapitre 6) à l'image de Covas et al. (2005) ou Lanza (2007).
4. faire varier la masse, ce qui en pratique dans nos simulations revient à changer à la fois le rapport d'aspect entre la zone radiative et la zone convective (Moss et al., 2004), la densité ainsi que le profil des ingrédients physiques.
5. prendre en compte l'influence d'autres sources de non linéarité comme la saturation de la diffusivité (Rüdiger et al., 1994) ou de l'effet  $\alpha$  (voir la revue de Charbonneau, 2010).
6. appliquer un couple externe dû à un vent magnétisé et étudier l'évolution sur des temps séculaires du moment cinétique (Spada et al., 2010).
7. dans la Section 4.2, nous avons écrit les équations qui permettent de prendre en compte la rétroaction du champ magnétique sur les champs  $u_r$  et  $u_\theta$ , ce qui permettrait de faire varier la circulation méridienne. Cependant, cette implémentation est plus complexe que la composante  $u_\phi$  car elle nécessite l'introduction d'une équation régissant l'énergie comme dans Rempel (2005a).

Dans ces futurs travaux, et en particulier ceux concernant la modulation et l'évolution à long terme du moment cinétique, le temps physique impliqué est au moins de l'ordre de 100 fois le temps actuel. Pour préserver la rapidité de ces simulations, il deviendra alors nécessaire de paralléliser STELEM.

## 8.2 Synthèse des résultats ASH

La seconde approche utilisée dans ce manuscrit consiste à résoudre explicitement les équations complètes de la MHD (cf Partie III). Nous avons alors réalisé, dans un premier temps sans champ magnétique, une série de simulations de complexité progressive. Tout d'abord, seule la zone convective a été simulée (cf Chapitre 5) pour étudier comment les propriétés de la convection changent avec la masse de l'étoile dans un intervalle allant de 0.5 à 1.1  $M_\odot$ . Plus la masse est élevée, plus le taux d'énergie à transporter vers la surface, i.e. la luminosité est élevée (elle varie d'un facteur 50 entre les deux masses extrêmes). De plus, la densité de l'enveloppe convective décroît. La combinaison de ces deux facteurs augmente la vitesse et le contraste de température entre les écoulements ascendants et descendants. En conséquence, le nombre de Rossby augmente proportionnellement à la vitesse. Pour les nombres de Rossby les plus faibles, la convection est caractérisée par la présence d'active nests dont l'existence réelle est sans doute remise en question à cause de la diffusivité thermique utilisée dans nos modèles plus élevée que la réalité.

Toutes les étoiles sont sujettes à deux écoulements globaux : une rotation différentielle et une circulation méridienne. La rotation différentielle possède un maximum à la surface à l'équateur et une



amplitude  $\Delta\Omega$  comparable dans chaque cas. Seule l'étoile à  $1.1 M_\odot$  se distingue par son profil anti-solaire, c'est-à-dire avec des pôles tournant plus rapidement qu'à l'équateur. Elle est également la seule à posséder une circulation méridienne unicellulaire, alors que tous les autres modèles possèdent une circulation méridienne pluricellulaire dont la fragmentation est de plus en plus importante lorsque la masse diminue, traduisant implicitement une décroissance du nombre de Rossby.

Dans un second temps, nous avons inclus une zone radiative pour prendre en compte son couplage avec l'enveloppe convective et voir comment sa présence influence les propriétés convectives (cf Chapitre 6). Dans ces modèles, une tachocline se développe spontanément. Sa position est cependant affectée par le profil de la diffusivité et le temps d'évolution de la simulation car le fort cisaillement diffuse thermiquement en l'absence d'un mécanisme de confinement. Ce dernier reste à ce jour un sujet en plein débat.

Pour comprendre comment une telle rotation différentielle s'est établie, nous avons identifié quels processus physiques transportent le moment cinétique. Dans les étoiles dont la rotation différentielle est solaire (équateur plus rapide que les pôles), le tenseur de Reynolds est le principal contributeur et transporte le moment cinétique vers la surface et vers l'équateur. La viscosité s'oppose aux gradients de vitesse et transporte donc le moment cinétique de manière opposée au tenseur de Reynolds. La circulation méridienne a une contribution plus faible et plus variable dépendant de la position en rayon et latitude à cause de la structure très intermittente. L'étoile à  $1.1 M_\odot$  montre, en accord avec son profil différent de rotation, un comportement aux antipodes de celui décrit précédemment. Le tenseur de Reynolds transporte toujours le moment cinétique vers l'équateur mais vers la base de la zone convective. La viscosité s'oppose à nouveau au tenseur de Reynolds. Cependant, la circulation méridienne, grâce à sa cohérence, peut transporter le moment cinétique efficacement à la fois vers la surface et vers les pôles.

Puis, nous avons varié le taux de rotation de 1 à  $5\Omega_\odot$  pour chacun des modèles précédents, nous amenant à un total de 12 simulations. Ceci affecte principalement le nombre de Rossby. Les étoiles partageant des valeurs similaires montrent des propriétés très semblables. Lorsque  $R_o < 1$ , la convection est fortement influencée par la rotation qui a tendance à l'inhiber car la force de Coriolis dévie les écoulements convectifs. Seuls les "active nests" traversent toute la zone convective jusqu'à la base de la zone convective. Les écoulements globaux sont également fortement affectés. La rotation différentielle devient de plus en plus alignée avec l'axe de rotation sous la contrainte de Taylor-Proudman. De la même façon, la circulation méridienne se fragmente en de nombreuses sous structures également alignées avec l'axe de rotation. Le profil, mais aussi l'amplitude de ces écoulements dépendent maintenant à la fois de la masse et du taux de rotation comme  $\Delta\Omega \propto \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{3.9} \left(\frac{\Omega}{\Omega_\odot}\right)^{0.6}$  et  $\text{MCKE} \propto \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{-0.14} \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_\odot}\right)^{-0.8}$  qualitativement en accord avec les précédentes simulations 3D de [Brown et al. \(2008\)](#) et [Augustson et al. \(2012\)](#). Notons toutefois que la présence d'un champ magnétique tend à réduire la rotation différentielle à cause du tenseur de Maxwell. Nos modèles hydrodynamiques surestiment donc probablement la rotation différentielle. D'autre part, le cas particulier du modèle à  $1.1 M_\odot$  bascule d'un profil anti-solaire à un profil solaire à  $\Omega_0 = 3\Omega_\odot$ . Ceci nous montre qu'à la fois l'épaisseur de la zone convective mais également le taux de rotation influence la redistribution du moment cinétique et donc *in fine* le profil de la rotation différentielle.

Enfin, nous développons des simulations incluant désormais un champ magnétique dans les étoiles en rotation rapide. Dans ces modèles, le champ magnétique s'organise en intenses rubans enlacés localisés autour de l'équateur, extrayant leur énergie de la convection mais aussi de la forte rotation différentielle. Nous pourrions alors quantifier la quantité d'énergie transférée d'un réservoir à un autre et comment ces flux dépendent de la masse et du taux de rotation. Nous nous attendons également à ce que la présence d'une zone radiative donne lieu à l'accumulation de champ magnétique toroidal sous la base de la zone convective comme dans ([Browning et al., 2006](#)). La présence de la tachocline pourrait également avoir un rôle majeur dans l'auto-organisation du champ et dans l'apparition de cycles magnétiques ([Brown et al., 2011](#); [Nelson et al., 2013b](#)). L'impact des plumes convectives sur la

zone radiative excite également un large spectre d'ondes internes (Alvan et al., 2013).

### 8.3 Vers une utilisation conjointe des simulations 2D et 3D

Cette thèse a abordé la dynamique interne des étoiles sous deux aspects différents, l'un utilisant des simulations numériques décrivant l'activité magnétique à grande échelle, l'autre sondant les couplages non linéaires entre la convection et la rotation. On mettra en avant dans cette section de quelle manière cette approche duale peut nous aider à comprendre le magnétisme des étoiles.

Comme nous l'avons vu dans la Partie II, les simulations 2D cinématiques s'appuient sur des ingrédients physiques fournies a priori, que ce soit par les observations ou des simulations numériques plus précises comme celles présentées dans la Partie III. En particulier, ces dernières pourraient nous aider à vérifier si l'amplitude du pompage turbulent varie comme  $\gamma \propto \Omega_0^2$ . Contrairement aux simulations de Tobias et al. (2001) ou Käpylä et al. (2006) par exemple, nos simulations englobant l'ensemble de la sphère peuvent fournir une dépendance moins *ad hoc*. Elles peuvent également caractériser plus précisément les écoulements globaux de la zone convective (rotation différentielle et circulation méridienne) que l'on sait sensibles au taux de rotation et très importants pour l'organisation du champ magnétique à grande échelle.

Comme nous l'avons vu dans la Section 2.2.4 et 3.2, le pompage turbulent, de même que l'effet  $\alpha$  et la diffusivité turbulente  $\eta$ , émanent de la décomposition de la force électromotrice. Calculer le profil de ces coefficients et voir comment leur amplitude et forme varient en fonction du taux de rotation (et/ou de la masse) est très difficile vu l'énorme espace de paramètres à couvrir ( $R_e$ ,  $T_a$ ,  $R_m$ ,  $P_r$ ,  $P_m$  etc.). Plusieurs méthodes existent pour déterminer ces coefficients (voir la revue de Pipin, 2012) :

- simulations DNS de la magnéto-convection en géométrie cartésienne Brandenburg et al. (1990); Ossendrijver et al. (2001, 2002); Giesecke et al. (2005); Käpylä et al. (2006); Cattaneo and Hughes (2006); Hughes and Cattaneo (2008) dans lesquelles un champ magnétique uniforme est imposé et où l'on mesure directement la force électromotrice résultante.
- leurs équivalents dans des simulations globales (dont ASH fait partie) comme dans Brown et al. (2010) ou Racine et al. (2011).
- méthode de champ-test<sup>1</sup> (Schrinner et al., 2005, 2007) où l'évolution de champs magnétiques tests pour chaque composante de la vitesse placés dans un écoulement convectif turbulent ne rétroagissent pas sur le champ de vitesse. Leur suivi permet d'extraire les coefficients  $\alpha_{ij}$  et  $\eta_i$  (Käpylä et al., 2008, 2009a; Rheinhardt and Brandenburg, 2010; Schrinner, 2011; Schrinner et al., 2012). L'idée est de pouvoir, une fois ces coefficients et/ou lois d'échelles déterminés, d'obtenir un pouvoir prédictif voire idéalement de s'abstraire de toute simulation lourde en extrapolant les résultats à des paramètres encore plus proches des vraies étoiles.

En retour, les simulations 2D peuvent, grâce à leur rapidité, servir de guide en identifiant quels processus sont susceptibles d'être importants pour capturer l'auto organisation naturelle du champ magnétique à grande échelle. Le Chapitre 3 en est un exemple. Néanmoins, ces simulations se veulent de plus en plus réalistes, en prenant en compte par exemple la rétroaction du champ magnétique par l'effet Malkus-Proctor (cf Chapitre 4). L'introduction de cette non linéarité ouvre un vaste champ de recherche mais nécessite aussi des temps de calculs significativement plus importants impliquant la parallélisation du code.

D'un autre côté, les toutes dernières simulations 3D MHD sont désormais capables de reproduire des cycles magnétiques (Brown et al., 2011; Nelson et al., 2013b), mais aussi l'émergence de tubes de champ magnétique depuis sa génération à la base de la zone convective (Nelson et al., 2013a). Ces récents travaux ouvrent un horizon nouveau : simuler une étoile dans sa globalité, de l'échelle convective aux cycles magnétiques, avec émergence spontanée de tubes de champ, et ce pour une large variété d'étoiles. Comme cette thèse a essayé de le démontrer, la frontière qui sépare les simulations 2D et 3D

1. ou *test-field*

est désormais plus ténue que jamais.



- Acuna, M. H., Connerney, J. E. P., Ness, N. F., Lin, R. P., Mitchell, D., Carlson, C. W., McFadden, J., Anderson, K. A., Reme, H., Mazelle, C., Vignes, D., Wasilewski, P., and Cloutier, P. : 1999, *Science* **284**, 790
- Alvan, L., Mathis, S., and Decressin, T. : 2013, *ArXiv e-prints* **1303**, 1715
- Andre, P., Ward-Thompson, D., and Barsony, M. : 1993, *The Astrophysical Journal* **406**, 122
- Arshakian, T. G., Beck, R., Krause, M., and Sokoloff, D. : 2009, *Astronomy and Astrophysics* **494**, 21
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., and Scott, P. : 2009, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **47(1)**, 481
- Augustson, K., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2010, Vol. 216, p. 835, Bulletin of the American Astronomical Society
- Augustson, K., Rast, M., Trampedach, R., and Toomre, J. : 2011, *Journal of Physics Conference Series* **271**, 2070
- Augustson, K. C., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2012, *The Astrophysical Journal* **756**, 169
- Aurière, M. : 2003, Vol. 9, p. 105, EAS Publications Series
- Aurière, M., Wade, G. A., Silvester, J., Lignières, F., Bagnulo, S., Bale, K., Dintrans, B., Donati, J. F., Folsom, C. P., Gruberbauer, M., Hui Bon Hoa, A., Jeffers, S., Johnson, N., Landstreet, J. D., Lèbre, A., Lueftinger, T., Marsden, S., Mouillet, D., Naseri, S., Paletou, F., Petit, P., Power, J., Rincon, F., Strasser, S., and Toqué, N. : 2007, *Astronomy and Astrophysics* **475**, 1053
- Babcock, H. W. : 1961, *The Astrophysical Journal* **133**, 572
- Baglin, A., Auvergne, M., Barge, P., Deleuil, M., Catala, C., Michel, E., Weiss, W., and Team, C. : 2006, Vol. 1306, p. 33, ESA Special Publication
- Bahcall, J. N., Pinsonneault, M. H., and Wasserburg, G. J. : 1995, *Reviews of Modern Physics* **67**, 781
- Baliunas, S. L., Donahue, R. A., Soon, W. H., Horne, J. H., Frazer, J., Woodard-Eklund, L., Bradford, M., Rao, L. M., Wilson, O. C., Zhang, Q., Bennett, W., Briggs, J., Carroll, S. M., Duncan, D. K., Figueroa, D., Lanning, H. H., Misch, T., Mueller, J., Noyes, R. W., Poppe, D., Porter, A. C., Robinson, C. R., Russell, J., Shelton, J. C., Soyumer, T., Vaughan, A. H., and Whitney, J. H. : 1995, *The Astrophysical Journal* **438**, 269

- Ballesteros-Paredes, J., Klessen, R. S., Mac Low, M.-M., and Vazquez-Semadeni, E. : 2007, *Protostars and Planets V* pp 63–80
- Ballot, J., Brun, A. S., and Turck-Chièze, S. : 2007, *The Astrophysical Journal* **669**, 1190
- Barnes, J. R., Collier Cameron, A., Donati, J.-F., James, D. J., Marsden, S. C., and Petit, P. : 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **357**, L1
- Barnes, S. A. : 2003, *The Astrophysical Journal* **586**, 464
- Basri, G. and Mohanty, S. : 2003, Vol. 211, p. 427, Brown Dwarfs, Proceedings of IAU Symposium #211
- Basu, S. and Antia, H. M. : 2010, *The Astrophysical Journal* **717**, 488
- Batchelor, G. K. : 1950, *Royal Society of London Proceedings Series A* **201**, 405
- Battaner, E. : 1996, *Astrophysical Fluid Dynamics*
- Beck, R. : 2000, Vol. 358, pp 777–796, Royal Society of London Transactions Series A
- Beck, R. and Hoernes, P. : 1996, *Nature* **379**, 47
- Beer, J., Tobias, S., and Weiss, N. : 1998, *Solar Physics* **181**, 237
- Belkacem, K., Mathis, S., Goupil, M. J., and Samadi, R. : 2009, *Astronomy and Astrophysics* **508**, 345
- Benevolenskaya, E. E. : 2004, *Astronomy and Astrophysics* **428**, L5
- Bennett, J., Donahue, M., Schneider, N., and Voit, M. : 2003, *The Cosmic Perspective, Third Edition*, Addison Wesley, 3 edition
- Bennett, J. O., Donahue, M. O., Schneider, N., and Voit, M. : 2011, *The Essential Cosmic Perspective*, Addison-Wesley, 6 edition
- Berdyugina, S. V. : 2005, *Living Reviews in Solar Physics* **2**, 8
- Berhanu, M., Monchaux, R., Fauve, S., Mordant, N., Pétrélis, F., Chiffaudel, A., Daviaud, F., Dubrulle, B., Marié, L., Ravelet, F., Bourgoïn, M., Odier, P., Pinton, J.-F., and Volk, R. : 2007, *EPL (Europhysics Letters)* **77**, 59001
- Bessolaz, N. and Brun, A. S. : 2011, *The Astrophysical Journal* **728**, 115
- Bethe, H. A. : 1939, *Physical Review* **55**, 434
- Biermann, L. and Schlüter, A. : 1951, *Physical Review* **82**, 863
- Blöcker, T., Holweger, H., Freytag, B., Herwig, F., Ludwig, H.-G., and Steffen, M. : 1998, *Space Science Reviews* **85**(1-2), 105
- Boer, K. S. d. and Seggewiss, W. : 2008, *Stars and Stellar Evolution*, EDP Sciences
- Bonanno, A., Elstner, D., Rüdiger, G., and Belvedere, G. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **390**, 673
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., and Marck, J.-A. : 1998, *Physical Review D* **58**, 104020
- Borrero, J. M. and Ichimoto, K. : 2011, *Living Rev. Solar Phys.* **8**



- Borucki, W., Koch, D., Basri, G., Batalha, N., Brown, T., Caldwell, D., Christensen-Dalsgaard, J., Cochran, W., Dunham, E., Gautier, T. N., Geary, J., Gilliland, R., Jenkins, J., Kondo, Y., Latham, D., Lissauer, J. J., and Monet, D. : 2008, Vol. 249, pp 17–24, *Exoplanets : Detection, Formation and Dynamics*, Proceedings of the International Astronomical Union, IAU Symposium
- Bourgoin, M., Marie, L., Petrelis, F., Gasquet, C., Guigon, A., Luciani, J.-B., Moulin, M., Namer, F., Burguete, J., Chiffaudel, A., Fauve, S., and Odier, P. : 2002, *Physics of Fluids* **14**, 3046
- Bouvier, J. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **489**, L53
- Bouvier, J. : 2009, Vol. 39, pp 199–209, EAS Publications Series
- Boyd, J. P. : 1989, *Chebyshev & Fourier spectral methods*, Springer-Verlag, Berlin
- Brandenburg, A. : 2011, *The Astrophysical Journal* **741**, 92
- Brandenburg, A., Moss, D., and Tuominen, I. : 1992, Vol. 27, p. 536, The solar cycle ; Proceedings of the National Solar Observatory/Sacramento Peak 12th Summer Workshop, ASP Conference Series
- Brandenburg, A., Saar, S. H., and Turpin, C. R. : 1998, *The Astrophysical Journal Letters* **498**, L51
- Brandenburg, A., Sokoloff, D., and Subramanian, K. : 2012, *arXiv :1203.6195*
- Brandenburg, A., Tuominen, I., Nordlund, A., Pulkkinen, P., and Stein, R. F. : 1990, *Astronomy and Astrophysics* **232**, 277
- Brooke, J., Moss, D., and Phillips, A. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **395**, 1013
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2008, *The Astrophysical Journal* **689**, 1354
- Brown, B. P., Browning, M. K., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2010, *The Astrophysical Journal* **711**, 424
- Brown, B. P., Miesch, M. S., Browning, M. K., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2011, *The Astrophysical Journal* **731**, 69
- Brown, S. F., Donati, J.-F., Rees, D. E., and Semel, M. : 1991, *Astronomy and Astrophysics* **250**, 463
- Brown, T. M., Christensen-Dalsgaard, J., Dziembowski, W. A., Goode, P., Gough, D. O., and Morrow, C. A. : 1989, *The Astrophysical Journal* **343**, 526
- Browning, M. K. : 2008, *The Astrophysical Journal* **676**, 1262
- Browning, M. K., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2004, *The Astrophysical Journal* **601**, 512
- Browning, M. K., Miesch, M. S., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2006, *The Astrophysical Journal Letters* **648**, L157
- Brummell, N. H., Clune, T. L., and Toomre, J. : 2002, *The Astrophysical Journal* **570**, 825
- Brummell, N. H., Hurlburt, N. E., and Toomre, J. : 1996, *The Astrophysical Journal* **473**, 494
- Brummell, N. H., Hurlburt, N. E., and Toomre, J. : 1998, *The Astrophysical Journal* **493**, 955
- Brun, A. S. : 2004, *Solar Physics* **220**, 333
- Brun, A. S. : 2005, *Habilitation à diriger les recherches : Convection, Turbulence, Rotation et Magnétisme dans les Etoiles*

- Brun, A. S., Antia, H. M., Chitre, S. M., and Zahn, J.-P. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **391**, 725
- Brun, A. S., Browning, M. K., and Toomre, J. : 2005, *The Astrophysical Journal* **629**, 461
- Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2004, *The Astrophysical Journal* **614**, 1073
- Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2011, *The Astrophysical Journal* **742**, 79
- Brun, A. S. and Palacios, A. : 2009, *The Astrophysical Journal* **702**, 1078
- Brun, A. S. and Rempel, M. : 2009, *Space Science Reviews* **144**, 151
- Brun, A. S. and Toomre, J. : 2002, *The Astrophysical Journal* **570**, 865
- Bullard, E. and Gellman, H. : 1954, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **247**, 213
- Burnett, D. S. : 1987, *Finite Element Analysis : From Concepts to Applications*, Addison Wesley
- Bushby, P. J. : 2005, *Astronomische Nachrichten* **326**, 218
- Bushby, P. J. : 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **371**, 772
- Busse, F. H. : 1970, *Journal of Fluid Mechanics* **44**, 441
- Busse, F. H. and Cuong, P. G. : 1977, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **8**, 17
- Böhm-Vitense, E. : 2007, *The Astrophysical Journal* **657**, 486
- Caligari, P., Moreno-Insertis, F., and Schussler, M. : 1995, *The Astrophysical Journal* **441**, 886
- Cattaneo, F., Brummell, N. H., Toomre, J., Malagoli, A., and Hurlburt, N. E. : 1991, *The Astrophysical Journal* **370**, 282
- Cattaneo, F., Emonet, T., and Weiss, N. : 2003, *The Astrophysical Journal* **588**, 1183
- Cattaneo, F. and Hughes, D. W. : 2006, *Journal of Fluid Mechanics* **553**, 401
- Chabrier, G. : 2003, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **115**, 763
- Chandrasekhar, S. : 1961, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*
- Chaplin, W. C., Elsworth, Y., Isaak, G. R., Lines, R., McLeod, C. P., Miller, B. A., New, R., and van der Raay, H. B. : 1996, *The Observatory* **116**, 32
- Charbonneau, P. : 2007, *Advances in Space Research* **39**, 1661
- Charbonneau, P. : 2010, *Living Reviews in Solar Physics* **7**, 3
- Charbonneau, P., Christensen-Dalsgaard, J., Henning, R., Larsen, R. M., Schou, J., Thompson, M. J., and Tomczyk, S. : 1999, *The Astrophysical Journal* **527**, 445
- Charbonneau, P. and Dikpati, M. : 2000, *The Astrophysical Journal* **543**, 1027
- Charbonneau, P. and Emonet, T. : 1998, *The STellar ELEMENTS code (private communication)*
- Charbonneau, P. and MacGregor, K. B. : 1992, *The Astrophysical Journal* **387**, 639
- Charbonneau, P. and MacGregor, K. B. : 1993, *The Astrophysical Journal* **417**, 762

- Charbonneau, P. and Saar, S. H. : 2001, Vol. 248, p. 189, ASP Conference Series
- Charbonnel, C. and Talon, S. : 2005, *Science* **309**, 2189
- Chatterjee, P., Nandy, D., and Choudhuri, A. R. : 2004, *Astronomy and Astrophysics* **427**, 1019
- Childress, S. and Gilbert, A. D. : 1995, *Stretch, Twist, Fold : The Fast Dynamo*, Springer, 1 edition
- Choudhuri, A. R. : 2012, *arXiv :1211.0520*
- Choudhuri, A. R., Schussler, M., and Dikpati, M. : 1995, *Astronomy and Astrophysics* **303**, L29
- Christensen, U. R. and Aubert, J. : 2006, *Geophysical Journal International* **166**, 97
- Christensen-Dalsgaard, J., Däppen, W., Ajukov, S. V., Anderson, E. R., Antia, H. M., Basu, S., Baturin, V. A., Berthomieu, G., Chaboyer, B., Chitre, S. M., Cox, A. N., Demarque, P., Donatowicz, J., Dziembowski, W. A., Gabriel, M., Gough, D. O., Guenther, D. B., Guzik, J. A., Harvey, J. W., Hill, F., Houdek, G., Iglesias, C. A., Kosovichev, A. G., Leibacher, J. W., Morel, P., Proffitt, C. R., Provost, J., Reiter, J., Rhodes, E. J., Rogers, F. J., Roxburgh, I. W., Thompson, M. J., and Ulrich, R. K. : 1996, *Science* **272(5266)**, 1286
- Clayton, D. D. : 1968, *Principles of stellar evolution and nucleosynthesis*
- Cline, K. S., Brummell, N. H., and Cattaneo, F. : 2003, *The Astrophysical Journal* **588**, 630
- Clune, T., Elliott, J., Miesch, M., Toomre, J., and Glatzmaier, G. : 1999, *Parallel Computing* **25(4)**, 361
- Collier Cameron, A. : 2007, *Astronomische Nachrichten* **328**, 1030
- Collier Cameron, A., Davidson, V. A., Hebb, L., Skinner, G., Anderson, D. R., Christian, D. J., Clarkson, W. I., Enoch, B., Irwin, J., Joshi, Y., Haswell, C. A., Hellier, C., Horne, K. D., Kane, S. R., Lister, T. A., Maxted, P. F. L., Norton, A. J., Parley, N., Pollacco, D., Ryans, R., Scholz, A., Skillen, I., Smalley, B., Street, R. A., West, R. G., Wilson, D. M., and Wheatley, P. J. : 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **400**, 451
- Collier Cameron, A., Donati, J.-F., and Semel, M. : 2002, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **330(3)**, 699–706
- Connerney, J. E. P. and Ness, N. F. : 1988, in *Mercury*, University of Arizona Press, pp 494–513
- Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., Corbard, T., Henney, C. J., and Jiménez-Reyes, S. : 2003, *The Astrophysical Journal Letters* **597**, L77
- Covas, E., Moss, D., and Tavakol, R. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **429**, 657
- Covas, E., Tavakol, R., Moss, D., and Tworkowski, A. : 2000, *Astronomy and Astrophysics* **360**, L21
- Cowling, T. G. : 1933, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **94**, 39
- Cox, J. P. : 1968, *Principles of stellar structure - Vol.1 : Physical principles ; Vol.2 : Applications to stars*
- De Rosa, M. L., Brun, A. S., and Hoeksema, J. T. : 2012, *The Astrophysical Journal* **757**, 96
- De Rosa, M. L., Gilman, P. A., and Toomre, J. : 2002, *The Astrophysical Journal* **581**, 1356
- De Rosa, M. L. and Toomre, J. : 2004, *The Astrophysical Journal* **616**, 1242

- Denissenkov, P. A., Pinsonneault, M., Terndrup, D. M., and Newsham, G. : 2010, *The Astrophysical Journal* **716**, 1269
- Dikpati, M. : 2005, *Advances in Space Research* **35**(3), 322
- Dikpati, M. and Charbonneau, P. : 1999, *The Astrophysical Journal* **518**, 508
- Dikpati, M. and Choudhuri, A. R. : 1994, *Astronomy and Astrophysics* **291**, 975
- Dikpati, M., de Toma, G., Gilman, P. A., Arge, C. N., and White, O. R. : 2004, *The Astrophysical Journal* **601**, 1136
- Dikpati, M. and Gilman, P. A. : 2001, *The Astrophysical Journal* **559**, 428
- Dikpati, M. and Gilman, P. A. : 2006, *The Astrophysical Journal* **649**, 498
- Dikpati, M. and Gilman, P. A. : 2007a, *New Journal of Physics* **9**, 297
- Dikpati, M. and Gilman, P. A. : 2007b, *Solar Physics* **241**, 1
- Dikpati, M., Saar, S. H., Brummell, N., and Charbonneau, P. : 2001, Vol. 248, p. 235, ASP Conference Series
- Do Cao, O. and Brun, A. S. : 2011, *Astronomische Nachrichten* **332**, 907
- Domingo, V., Fleck, B., and Poland, A. I. : 1995, *Solar Physics* **162**, 1
- Domínguez Cerdeña, I., Sánchez Almeida, J., and Kneer, F. : 2003, *Astronomy and Astrophysics* **407**, 741
- Donahue, R. A., Saar, S. H., and Baliunas, S. L. : 1996, *The Astrophysical Journal* **466**, 384
- Donati, J.-F. : 2001, Vol. 573, p. 207, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag
- Donati, J.-F. : 2003, Vol. 307, p. 41, ASP Conference Series
- Donati, J.-F., Brown, S. F., Semel, M., Rees, D. E., Dempsey, R. C., Matthews, J. M., Henry, G. W., and Hall, D. S. : 1992, *Astronomy and Astrophysics* **265**, 682
- Donati, J.-F. and Collier Cameron, A. : 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **291**, 1
- Donati, J.-F., Collier Cameron, A., Semel, M., Hussain, G. A. J., Petit, P., Carter, B. D., Marsden, S. C., Mengel, M., López Ariste, A., Jeffers, S. V., and Rees, D. E. : 2003, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **345**, 1145
- Donati, J.-F., Howarth, I. D., Jardine, M. M., Petit, P., Catala, C., Landstreet, J. D., Bouret, J.-C., Alecian, E., Barnes, J. R., Forveille, T., Paletou, F., and Manset, N. : 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **370**, 629
- Donati, J.-F. and Landstreet, J. D. : 2009, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **47**, 333
- Donati, J.-F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., and Collier Cameron, A. : 1997, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **291**, 658
- Dorch, S. B. F. and Nordlund, A. : 2001, *Astronomy and Astrophysics* **365**, 562
- Dormy, E. and Soward, A. M. (eds.) : 2007, *Mathematical Aspects of Natural Dynamos*, Chapman and Hall/CRC, 1 edition

- Dormy, E., Soward, A. M., Jones, C. A., Jault, D., and Cardin, P. : 2004, *Journal of Fluid Mechanics* **501**, 43
- D'Silva, S. and Choudhuri, A. R. : 1993, *Astronomy and Astrophysics* **272**, 621
- D'Silva, S. and Howard, R. F. : 1993, *Solar Physics* **148**, 1
- Duncan, R. C. and Thompson, C. : 1992, *The Astrophysical Journal Letters* **392**, L9
- Durney, B. R. : 1999, *The Astrophysical Journal* **511**, 945
- Durney, B. R., De Young, D. S., and Roxburgh, I. W. : 1993, *Solar Physics* **145**, 207
- Duvall, T. L., Jefferies, S. M., Harvey, J. W., and Pomerantz, M. A. : 1993, *Nature* **362**, 430
- Dyke, M. V. : 1982, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press, Inc., 12th edition
- Eddington, A. S. : 1926, *The Internal Constitution of the Stars*
- Eddy, J. A. : 2005, *Solar Physics* **226**, 187
- Eff-Darwich, A., Korzennik, S. G., Jiménez-Reyes, S. J., and García, R. A. : 2008, *The Astrophysical Journal* **679**, 1636
- Elkin, V. G., Mathys, G., Kurtz, D. W., Hubrig, S., and Freyhammer, L. M. : 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **402**, 1883
- Elliott, J. R. : 1997, *Astronomy and Astrophysics* **327**, 1222
- Elliott, J. R. : 2000, *The Astrophysical Journal* **539**, 469
- Elliott, J. R., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2000, *The Astrophysical Journal* **533**, 546
- Elmegreen, B. G. : 2011, Vol. 51, pp 45–58, EAS Publications Series
- Elsasser, W. M. : 1946, *Physical Review* **69**, 106
- Elsasser, W. M. : 1956, *Reviews of Modern Physics* **28**, 135
- Fan, Y. : 2008, *The Astrophysical Journal* **676**, 680
- Fan, Y. : 2009, *Living Rev. Solar Phys.* 6
- Fan, Y., Fisher, G. H., and McClymont, A. N. : 1994, *The Astrophysical Journal* **436**, 907
- Fares, R., Donati, J.-F., Moutou, C., Bohlender, D., Catala, C., Deleuil, M., Shkolnik, E., Collier Cameron, A., Jardine, M. M., and Walker, G. A. H. : 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **398**, 1383
- Fearn, D. R. : 1998, *Reports on Progress in Physics* **61**, 175
- Featherstone, N. A., Browning, M. K., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2009, *The Astrophysical Journal* **705**, 1000
- Feigelson, E. D. and Montmerle, T. : 1999, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **37**, 363
- Foukal, P. and Jokipii, J. R. : 1975, *The Astrophysical Journal Letters* **199**, L71
- Frazier, E. N. : 1970, *Solar Physics* **14**, 89

- Freytag, B., Steffen, M., Ludwig, H.-G., Wedemeyer-Böhm, S., Schaffenberger, W., and Steiner, O. : 2011, *arXiv :1110.6844*, Journal of Computational Physics Volume 231, Issue 3, 1 February 2012, Pages 919-959 Special Issue : Computational Plasma Physics
- Fuhrmeister, B. and Schmitt, J. H. M. M. : 2003, *Astronomy and Astrophysics* **403**, 247
- Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., Robillot, J.-M., Roca Cortés, T., Turck-Chièze, S., Bocchia, R., Boumier, P., Cantin, M., Cespédes, E., Cougrand, B., Crétole, J., Damé, L., Decaudin, M., Delache, P., Denis, N., Duc, R., Dzitko, H., Fossat, E., Fourmond, J.-J., García, R. A., Gough, D., Grivel, C., Herreros, J. M., Lagardère, H., Moalic, J.-P., Pallé, P. L., Pétrou, N., Sanchez, M., Ulrich, R., and van der Raay, H. B. : 1995, *Solar Physics* **162**, 61
- Gailitis, A., Lielausis, O., Platacis, E., Dement'ev, S., Cifersons, A., Gerbeth, G., Gundrum, T., Stefani, F., Christen, M., and Will, G. : 2001, *Physical Review Letters* **86**, 3024
- Garaud, P. and Bodenheimer, P. : 2010, *The Astrophysical Journal* **719**, 313
- Garcia Lopez, R. J. and Spruit, H. C. : 1991, *The Astrophysical Journal* **377**, 268
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., Ballot, J., Pallé, P. L., Eff-Darwich, A., Mathur, S., and Provost, J. : 2007, *Science* **316**, 1591
- Gastine, T., Duarte, L., and Wicht, J. : 2012, *Astronomy and Astrophysics* **546**, 19
- Georgobiani, D., Zhao, J., Kosovichev, A. G., Benson, D., Stein, R. F., and Nordlund, A. : 2007, *The Astrophysical Journal* **657**, 1157
- Ghizaru, M., Charbonneau, P., and Smolarkiewicz, P. K. : 2010, *The Astrophysical Journal Letters* **715**, L133
- Giampapa, M. : 2005, *The Sun, solar analogs and the climate* p. 307–415
- Giampapa, M. S. : 2012, Vol. 286, pp 257–267, Proceedings of the International Astronomical Union
- Giesecke, A., Ziegler, U., and Rüdiger, G. : 2005, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **152**, 90
- Giles, P. M., Duvall, T. L., Scherrer, P. H., and Bogart, R. S. : 1997, *Nature* **390**, 52
- Gilman, P. A. : 1975, *Journal of Atmospheric Sciences* **32**, 1331
- Gilman, P. A. : 1977, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **8**, 93
- Gilman, P. A. : 1978, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **11**, 157
- Gilman, P. A. : 1979, *The Astrophysical Journal* **231**, 284
- Gilman, P. A. : 1983, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **53**, 243
- Gilman, P. A. and Glatzmaier, G. A. : 1981, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **45**, 335
- Gilman, P. A. and Miller, J. : 1981, *The Astrophysical Journal Supplement Series* **46**, 211
- Gilman, P. A., Morrow, C. A., and Deluca, E. E. : 1989, *The Astrophysical Journal* **338**, 528
- Gissinger, C., Petitdemange, L., Schrunner, M., and Dormy, E. : 2012, *ArXiv e-prints* **1203**, 4144
- Gizon, L. and Birch, A. C. : 2005, *Living Rev. Solar Phys.* **2**



- Gizon, L. and Solanki, S. K. : 2004, *Solar Physics* **220**(2), 169
- Glatzmaier, G. A. : 1984, *Journal of Computational Physics* **55**, 461
- Glatzmaier, G. A. : 1985a, *The Astrophysical Journal* **291**, 300
- Glatzmaier, G. A. : 1985b, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **31**, 137
- Glatzmaier, G. A. : 1987, in B. R. Durney and S. Sofia (eds.), *The Internal Solar Angular Velocity*, Vol. 137, pp 263–274, Springer Netherlands, Dordrecht
- Glatzmaier, G. A. : 2002, *Annual Review of Earth and Planetary Sciences* **30**, 237
- Glatzmaier, G. A. and Gilman, P. A. : 1982, *The Astrophysical Journal* **256**, 316
- Glatzmaier, G. A. and Roberts, P. H. : 1995, *Nature* **377**, 203
- Goldreich, P. and Kumar, P. : 1990, *The Astrophysical Journal* **363**, 694
- Gough, D. O. : 1969, *Journal of Atmospheric Sciences* **26**, 448
- Gough, D. O. and McIntyre, M. E. : 1998, *Nature* **394**, 755
- Gough, D. O. and Toomre, J. : 1983, *Solar Physics* **82**, 401
- Gough, D. O. and Weiss, N. O. : 1976, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **176**, 589
- Gregory, S. G., Jardine, M., Simpson, I., and Donati, J.-F. : 2006, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **371**, 999
- Gressel, O., Elstner, D., Ziegler, U., and Rüdiger, G. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **486**, L35
- Guerrero, G. and de Gouveia Dal Pino, E. M. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **485**, 267
- Güdel, M. and Nazé, Y. : 2009, *Astronomy and Astrophysics Review* **17**, 309
- Haber, D. A., Hindman, B. W., Toomre, J., Bogart, R. S., Larsen, R. M., and Hill, F. : 2002, *The Astrophysical Journal* **570**, 855
- Hale, G. E. : 1908, *The Astrophysical Journal* **28**, 315
- Hale, G. E., Ellerman, F., Nicholson, S. B., and Joy, A. H. : 1919, *The Astrophysical Journal* **49**, 153
- Hale, G. E. and Nicholson, S. B. : 1925, *The Astrophysical Journal* **62**, 270
- Harvey, J. W., Hill, F., Hubbard, R. P., Kennedy, J. R., Leibacher, J. W., Pintar, J. A., Gilman, P. A., Noyes, R. W., Title, A. M., Toomre, J., Ulrich, R. K., Bhatnagar, A., Kennewell, J. A., Marquette, W., Patron, J., Saa, O., and Yasukawa, E. : 1996, *Science* **272**, 1284
- Hathaway, D. H. : 1982, *Solar Physics* **77**, 341
- Hathaway, D. H. : 1996, *The Astrophysical Journal* **460**, 1027
- Hathaway, D. H. : 2010, *Living Rev. Solar Phys.* **7**
- Hathaway, D. H. : 2012, *The Astrophysical Journal* **760**, 84
- Hathaway, D. H., Beck, J. G., Bogart, R. S., Bachmann, K. T., Khatrri, G., Petitto, J. M., Han, S., and Raymond, J. : 2000, *Solar Physics* **193**, 299

- Hathaway, D. H. and Rightmire, L. : 2010, *Science* **327**, 1350
- Hawley, S., Reid, I. N., and Gizis, J. : 2000, Vol. 212, p. 252, ASP Conference Series
- Hawley, S. L. : 1993, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **105**, 955
- Heimpel, M. H., Aurnou, J. M., Al-Shamali, F. M., and Gomez Perez, N. : 2005, *Earth and Planetary Science Letters* **236**, 542
- Hennebelle, P. and Teyssier, R. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **477**, 25
- Henriques, V. M. J. : 2012, *Astronomy and Astrophysics* **548**, 114
- Herschel, W. : 1801, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series I* **91**, 265
- Hoeksema, J. T. : 1984, *Ph.D. Thesis*
- Hood, L. L., Zakharian, A., Halekas, J., Mitchell, D. L., Lin, R. P., Acuña, M. H., and Binder, A. B. : 2001, *Journal of Geophysical Research* **106**, 27825
- Hotta, H. and Yokoyama, T. : 2010a, *The Astrophysical Journal* **709**, 1009
- Hotta, H. and Yokoyama, T. : 2010b, *The Astrophysical Journal Letters* **714**, L308
- Howard, R. and Labonte, B. J. : 1980, *The Astrophysical Journal Letters* **239**, L33
- Howe, R., Christensen-Dalsgaard, J., Hill, F., Komm, R. W., Larsen, R. M., Schou, J., Thompson, M. J., and Toomre, J. : 2000, *The Astrophysical Journal Letters* **533**, L163
- Howe, R., Hill, F., Komm, R., Christensen-Dalsgaard, J., Larson, T. P., Schou, J., Thompson, M. J., and Ulrich, R. : 2011, *Journal of Physics Conference Series* **271**, 2074
- Howe, R., Rempel, M., Christensen-Dalsgaard, J., Hill, F., Komm, R., Larsen, R. M., Schou, J., and Thompson, M. J. : 2006, *The Astrophysical Journal* **649**, 1155
- Hoyng, P. : 1988, *The Astrophysical Journal* **332**, 857
- Hoyt, D. V. and Schatten, K. H. : 1998, *Solar Physics* **179**(1), 189
- Hubrig, S., Nesvacil, N., Schöller, M., North, P., Mathys, G., Kurtz, D. W., Wolff, B., Szeifert, T., Cunha, M. S., and Elkin, V. G. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **440**, L37
- Hughes, D. W. and Cattaneo, F. : 2008, *Journal of Fluid Mechanics* **594**, 445
- Hughes, D. W. and Proctor, M. R. E. : 2009, *Physical Review Letters* **102**, 44501
- Hulot, G., Finlay, C. C., Constable, C. G., Olsen, N., and Manda, M. : 2010, *Space Science Reviews* **152**, 159
- Hurlburt, N. E., Toomre, J., and Massaguer, J. M. : 1986, *The Astrophysical Journal* **311**, 563
- Iglesias, C. A. and Rogers, F. J. : 1996, *The Astrophysical Journal* **464**, 943
- Iroshnikov, P. S. : 1964, *Soviet Astronomy* **7**, 566
- Irwin, J., Hodgkin, S., Aigrain, S., Bouvier, J., Hebb, L., and Moraux, E. : 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **383**, 1588
- Ivers, D. J. and James, R. W. : 1986, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **36**, 317

- Johns-Krull, C. M. : 2007, *The Astrophysical Journal* **664**, 975
- Johns-Krull, C. M. and Valenti, J. A. : 1996, Vol. 109, p. 609, ASP Conference Series
- Jones, C. A., Boronski, P., Brun, A. S., Glatzmaier, G. A., Gastine, T., Miesch, M. S., and Wicht, J. : 2011, *Icarus* **216**, 120
- Jones, C. A., Kuzanyan, K. M., and Mitchell, R. H. : 2009, *Journal of Fluid Mechanics* **634**, 291
- Jouve, L. : 2008, *Ph.D. thesis*, Université Paris-Diderot - Paris VII
- Jouve, L., Brown, B. P., and Brun, A. S. : 2010a, *Astronomy and Astrophysics* **509**, 32
- Jouve, L. and Brun, A. S. : 2007, *Astronomy and Astrophysics* **474**, 239
- Jouve, L. and Brun, A. S. : 2009, *The Astrophysical Journal* **701**, 1300
- Jouve, L., Brun, A. S., and Talagrand, O. : 2011, *The Astrophysical Journal* **735**, 31
- Jouve, L., Proctor, M. R. E., and Lesur, G. : 2010b, *Astronomy and Astrophysics* **519**, 68
- Karak, B. B. : 2010, *The Astrophysical Journal* **724**, 1021
- Kawaler, S. D. : 1988, *The Astrophysical Journal* **333**, 236
- Kazantsev, A. P. : 1968, *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics* **26**, 1031
- Keppens, R., MacGregor, K. B., and Charbonneau, P. : 1995, *Astronomy and Astrophysics* **294**, 469
- Kichatinov, L. L. : 1991, *Astronomy and Astrophysics* **243**, 483
- Kichatinov, L. L. and Rudiger, G. : 1993, *Astronomy and Astrophysics* **276**, 96
- Kim, Y.-C. and Demarque, P. : 1996, *The Astrophysical Journal* **457**, 340
- Kippenhahn, R. and Weigert, A. : 1994, *Stellar Structure and Evolution*
- Kiraga, M., Jahn, K., Stepien, K., and Zahn, J.-P. : 2003, *Acta Astronomica* **53**, 321
- Kiraga, M. and Stepien, K. : 2007, *Acta Astronomica* **57**, 149
- Kitchatinov, L. L. : 2011, *arXiv :1108.1604*
- Kitchatinov, L. L. and Olemskoy, S. V. : 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **411**, 1059
- Kitchatinov, L. L. and Pipin, V. V. : 1998, *Astronomy Reports* **42**, 808
- Kitchatinov, L. L., Pipin, V. V., Makarov, V. I., and Tlatov, A. G. : 1999, *Solar Physics* **189**, 227
- Kitchatinov, L. L., Ruediger, G., and Kueker, M. : 1994, *Astronomy and Astrophysics* **292**, 125
- Kitchatinov, L. L. and Rüdiger, G. : 2005, *Astronomische Nachrichten* **326**, 379
- Kivelson, M. G., Khurana, K. K., Russell, C. T., Joy, S. P., Volwerk, M., Walker, R. J., Zimmer, C., and Linker, J. A. : 2001, *Journal of Geophysical Research* **106**, 26121
- Kivelson, M. G., Khurana, K. K., and Volwerk, M. : 2002, *Icarus* **157**, 507
- Klimchuk, J. A. : 2006, *Solar Physics* **234**, 41

- Knobloch, E. and Landsberg, A. S. : 1996, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **278**, 294
- Knobloch, E., Tobias, S. M., and Weiss, N. O. : 1998, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **297**, 1123
- Kolmogorov, A. : 1941, *Akademiia Nauk SSSR Doklady* **30**, 301
- Komm, R. W., Howard, R. F., and Harvey, J. W. : 1993, *Solar Physics* **147**, 207
- Konstantinova-Antova, R., Aurière, M., Charbonnel, C., Drake, N. A., Schröder, K.-P., Stateva, I., Alecian, E., Petit, P., and Cabanac, R. : 2010, *Astronomy and Astrophysics* **524**, 57
- Konstantinova-Antova, R., Aurière, M., Iliev, I. K., Cabanac, R., Donati, J.-F., Mouillet, D., and Petit, P. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **480**, 475
- Kosovichev, A. G. : 1996, *The Astrophysical Journal Letters* **469**, L61
- Kosovichev, A. G. and Schou, J. : 1997, *The Astrophysical Journal Letters* **482**, L207
- Kosovichev, A. G. and Stenflo, J. O. : 2008, *The Astrophysical Journal Letters* **688**, L115
- Kraft, R. P. : 1967, *The Astrophysical Journal* **150**, 551
- Kraichnan, R. H. : 1965, *Physics of Fluids* **8**, 1385
- Krause, F. and Raedler, K.-H. : 1980, *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory*
- Kudritzki, R.-P. and Puls, J. : 2000, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **38**(1), 613
- Kundu, P. K. and Cohen, I. M. : 2011, *Fluid Mechanics, Fifth Edition*, Academic Press, 5 edition
- Käpylä, P. J. and Brandenburg, A. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **488**, 9
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., and Brandenburg, A. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **491**, 353
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., and Brandenburg, A. : 2009a, *Astronomy and Astrophysics* **500**, 633
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., and Brandenburg, A. : 2009b, *The Astrophysical Journal* **697**, 1153
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., Ossendrijver, M., and Stix, M. : 2006, *Astronomy and Astrophysics* **455**, 401
- Käpylä, P. J., Korpi, M. J., and Tuominen, I. : 2004, *Astronomy and Astrophysics* **422**, 793
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., and Brandenburg, A. : 2011a, *Astronomische Nachrichten* **332**, 883
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., and Brandenburg, A. : 2012, *The Astrophysical Journal Letters* **755**, L22
- Käpylä, P. J., Mantere, M. J., Guerrero, G., Brandenburg, A., and Chatterjee, P. : 2011b, *Astronomy and Astrophysics* **531**, 162
- Küker, M., Arlt, R., and Rüdiger, G. : 1999, *Astronomy and Astrophysics* **343**, 977
- Laguerre, R., Nore, C., Ribeiro, A., Léorat, J., Guermond, J.-L., and Plunian, F. : 2008, *Physical Review Letters* **101**, 104501
- Landin, N. R., Mendes, L. T. S., and Vaz, L. P. R. : 2010, *Astronomy and Astrophysics* **510**, 46

- Landstreet, J. D. : 1992, *Astronomy and Astrophysics Review* **4**, 35
- Lanza, A. F. : 2007, *Astronomy and Astrophysics* **471**, 1011
- Larmor, J. : 1919, *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci* 159
- Lathrop, D. P. and Forest, C. B. : 2011, *Physics Today* **64(7)**, 40
- Leighton, R. B. : 1964, *The Astrophysical Journal* **140**, 1547
- Leighton, R. B. : 1969, *The Astrophysical Journal* **156**, 1
- Leorat, J., Pouquet, A., and Frisch, U. : 1981, *Journal of Fluid Mechanics* **104**, 419
- Lerche, I. and Parker, E. N. : 1972, *The Astrophysical Journal* **176**, 213
- Lesieur, M. : 2008, *Turbulence in Fluids*
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., and Aurière, M. : 2009, *Astronomy and Astrophysics* **500**, L41
- Lindsey, C. and Braun, D. C. : 2000, *Science* **287**, 1799
- Lyell, C. : 1837, *Principles of geology*, London John Murray, cambridge university library edition
- Lyot, B. : 1939, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **99**, 580
- MacDonald, J. and Mullan, D. J. : 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **348**, 702
- MacGregor, K. B. and Cassinelli, J. P. : 2003, *The Astrophysical Journal* **586**, 480
- Malkus, W. V. R. and Proctor, M. R. E. : 1975, *Journal of Fluid Mechanics* **67**, 417
- Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F.-P., and Zahn, J.-P. : 2008, *Solar Physics* **251**, 101
- Mathur, S., Eff-Darwich, A., García, R. A., and Turck-Chièze, S. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **484**, 517
- Matt, S. and Pudritz, R. E. : 2008, *The Astrophysical Journal* **678**, 1109
- Matt, S. P., Do Cao, O., Brown, B. P., and Brun, A. S. : 2011, *Astronomische Nachrichten* **332**, 897
- Matt, S. P., MacGregor, K. B., Pinsonneault, M. H., and Greene, T. P. : 2012, *The Astrophysical Journal Letters* **754**, L26
- McFadden, P. L., Merrill, R. T., McElhinny, M. W., and Lee, S. : 1991, *Journal of Geophysical Research* **96**, 3923
- McIntyre, M. E. : 1998, *Progress of Theoretical Physics Supplement* **130**, 137
- McKee, C. F. and Ostriker, E. C. : 2007, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **45**, 565
- Messina, S. and Guinan, E. F. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **393**, 225
- Mestel, L. : 2001, Vol. 248, p. 3, ASP Conference Series
- Mestel, L. and Landstreet, J. D. : 2005, Vol. 664, p. 183, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag
- Meunier, N. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **442**, 693

- Meunier, N., Roudier, T., and Rieutord, M. : 2008, *Astronomy and Astrophysics* **488**, 1109
- Meunier, N., Roudier, T., and Tkaczuk, R. : 2007a, *Astronomy and Astrophysics* **466**, 1123
- Meunier, N., Tkaczuk, R., Roudier, T., and Rieutord, M. : 2007b, *Astronomy and Astrophysics* **461**, 1141
- Micela, G., Sciortino, S., Serio, S., Vaiana, G. S., Bookbinder, J., Golub, L., Harnden, F. R., and Rosner, R. : 1985, *The Astrophysical Journal* **292**, 172
- Miesch, M. S. : 2005, *Living Rev. Solar Phys.* **2**
- Miesch, M. S., Brun, A. S., De Rosa, M. L., and Toomre, J. : 2008, *The Astrophysical Journal* **673**, 557
- Miesch, M. S., Brun, A. S., and Toomre, J. : 2006, *The Astrophysical Journal* **641**, 618
- Miesch, M. S., Elliott, J. R., Toomre, J., Clune, T. L., Glatzmaier, G. A., and Gilman, P. A. : 2000, *The Astrophysical Journal* **532**, 593
- Miesch, M. S. and Gilman, P. A. : 2004, *Solar Physics* **220**, 287
- Miesch, M. S. and Hindman, B. W. : 2011, *The Astrophysical Journal* **743**, 79
- Miesch, M. S. and Toomre, J. : 2009, *Annual Review of Fluid Mechanics* **41**, 317
- Miyahara, H., Sokoloff, D., and Usoskin, I. G. : 2006, *Advances in Geosciences, Volume 2 : Solar Terrestrial (ST)* **2**, 1
- Moffatt, H. K. : 1978, *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*
- Monchaux, R., Berhanu, M., Bourgoin, M., Moulin, M., Odier, P., Pinton, J.-F., Volk, R., Fauve, S., Mordant, N., Pétrélis, F., Chiffaudel, A., Daviaud, F., Dubrulle, B., Gasquet, C., Marié, L., and Ravelet, F. : 2007, *Physical Review Letters* **98**, 44502
- Morel, P. : 1997, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **124**, 597
- Morgenthaler, A., Petit, P., Saar, S., Solanki, S. K., Morin, J., Marsden, S. C., Aurière, M., Dintrans, B., Fares, R., Gastine, T., Lanoux, J., Lignières, F., Paletou, F., Ramírez Vélez, J. C., Théado, S., and Van Grootel, V. : 2012, *Astronomy and Astrophysics* **540**, 138
- Morin, J., Dormy, E., Schrunner, M., and Donati, J.-F. : 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **418**, L133
- Moss, D. : 2003, Vol. 9, p. 21, EAS Publications Series
- Moss, D. and Brooke, J. : 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **315**, 521
- Moss, D., Saar, S. H., and Sokoloff, D. : 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **388**, 416
- Moss, D., Sokoloff, D., Kuzanyan, K., and Petrov, A. : 2004, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **98**, 257
- Muller, R., Auffret, H., Roudier, T., Vigneau, J., Simon, G. W., Frank, Z., Shine, R. A., and Title, A. M. : 1992, *Nature* **356**, 322

- Muthsam, H. J., Kupka, F., Löw-Baselli, B., Obertscheider, C., Langer, M., and Lenz, P. : 2010, *New Astronomy* **15**, 460
- Muñoz-Jaramillo, A., Nandy, D., and Martens, P. C. H. : 2011, *The Astrophysical Journal Letters* **727**, L23
- Muñoz-Jaramillo, A., Nandy, D., Martens, P. C. H., and Yeates, A. R. : 2010, *The Astrophysical Journal Letters* **720**, L20
- Nandy, D., Muñoz-Jaramillo, A., and Martens, P. C. H. : 2011, *Nature* **471**, 80
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2011, *The Astrophysical Journal Letters* **739**, L38
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2013a, *Solar Physics*
- Nelson, N. J., Brown, B. P., Brun, A. S., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2013b, *The Astrophysical Journal* **762**, 73
- Nesme-Ribes, E., Ferreira, E. N., Sadourny, R., Le Treut, H., and Li, Z. X. : 1993, *Journal of Geophysical Research* **98**, 18923
- Nordlund, A. : 1982, *Astronomy and Astrophysics* **107**, 1
- Nordlund, A., Stein, R. F., and Asplund, M. : 2009, *Living Rev. Solar Phys.* 6
- Noyes, R. W., Weiss, N. O., and Vaughan, A. H. : 1984, *The Astrophysical Journal* **287**, 769
- Oláh, K., Kolláth, Z., Granzer, T., Strassmeier, K. G., Lanza, A. F., Järvinen, S., Korhonen, H., Baliunas, S. L., Soon, W., Messina, S., and Cutispoto, G. : 2009, *Astronomy and Astrophysics* **501**, 703
- Oláh, K. and Strassmeier, K. G. : 2002, *Astronomische Nachrichten* **323**, 361
- Ossendrijver, A. J. H. and Hoyng, P. : 1996, *Astronomy and Astrophysics* **313**, 959
- Ossendrijver, M., Stix, M., and Brandenburg, A. : 2001, *Astronomy and Astrophysics* **376**, 713
- Ossendrijver, M., Stix, M., Brandenburg, A., and Rüdiger, G. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **394**, 735
- Otsuji, K., Shibata, K., Kitai, R., Ueno, S., Nagata, S., Matsumoto, T., Nakamura, T., Watanabe, H., Tsuneta, S., Suematsu, Y., Ichimoto, K., Shimizu, T., Katsukawa, Y., Tarbell, T. D., Lites, B., Shine, R. A., and M., T. A. : 2007, *Publications of the Astronomical Society of Japan* **59**, 649
- Palacios, A. : 2012, in *Red Giants as Probes of the Structure and Evolution of the Milky Way*, p. 105
- Palacios, A., Charbonnel, C., Talon, S., and Siess, L. : 2006, *Astronomy and Astrophysics* **453**, 261
- Pallavicini, R., Golub, L., Rosner, R., Vaiana, G. S., Ayres, T., and Linsky, J. L. : 1981, *The Astrophysical Journal* **248**, 279
- Parker, E. N. : 1955, *The Astrophysical Journal* **122**, 293
- Parker, E. N. : 1958, *The Astrophysical Journal* **128**, 664
- Pedlosky, J. : 1992, *Geophysical Fluid Dynamics*, Springer-Verlag New York Inc., 2nd ed. 1987. corr. 2nd printing 1992 edition



- Petit, P., Dintrans, B., Solanki, S. K., Donati, J.-F., Aurière, M., Lignières, F., Morin, J., Paletou, F., Ramirez Velez, J., Catala, C., and Fares, R. : 2008, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **388**, 80
- Petit, P., Lignières, F., Wade, G. A., Aurière, M., Alina, D., Böhm, T., and Oza, A. : 2011, *arXiv :1109.6888*
- Petit, P., Lignières, F., Wade, G. A., Aurière, M., Böhm, T., Bagnulo, S., Dintrans, B., Fumel, A., Grunhut, J., Lanoux, J., Morgenthaler, A., and Van Grootel, V. : 2010, *Astronomy and Astrophysics* **523**, 41
- Petrovay, K. : 2010, *Living Rev. Solar Phys.* 7
- Pevtsov, A. A., Fisher, G. H., Acton, L. W., Longcope, D. W., Johns-Krull, C. M., Kankelborg, C. C., and Metcalf, T. R. : 2003, *The Astrophysical Journal* **598**, 1387
- Phillips, A., Brooke, J., and Moss, D. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **392(2)**, 713
- Pinsonneault, M. : 1997, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **35**, 557
- Pipin, V. V. : 2012, *arXiv :1211.2426*
- Pipin, V. V. and Kosovichev, A. G. : 2011, *The Astrophysical Journal* **738**, 104
- Pizzolato, N., Maggio, A., Micela, G., Sciortino, S., and Ventura, P. : 2003, *Astronomy and Astrophysics* **397**, 147
- Platt, N., Spiegel, E. A., and Tresser, C. : 1993a, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **73**, 147
- Platt, N., Spiegel, E. A., and Tresser, C. : 1993b, *Physical Review Letters* **70**, 279
- Ponomarenko, Y. B. : 1973, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics* **14**, 775
- Ponty, Y., Mininni, P. D., Montgomery, D. C., Pinton, J.-F., Politano, H., and Pouquet, A. : 2005, *Physical Review Letters* **94**, 164502
- Pope, S. B. : 2000, *Turbulent Flows*, Cambridge University Press
- Pouquet, A., Galtier, S., and Politano, H. : 1999, Vol. 168, p. 417, ASP Conference Series
- Puschmann, K. G., Ruiz Cobo, B., Vázquez, M., Bonet, J. A., and Hanslmeier, A. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **441**, 1157
- Pétrélis, F., Bourgoin, M., Marié, L., Burguete, J., Chiffaudel, A., Daviaud, F., Fauve, S., Odier, P., and Pinton, J.-F. : 2003, *Physical Review Letters* **90**, 174501
- Pétrélis, F., Mordant, N., and Fauve, S. : 2007, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **101**, 289
- Racine, E., Charbonneau, P., Ghizaru, M., Bouchat, A., and Smolarkiewicz, P. K. : 2011, *The Astrophysical Journal* **735**, 46
- Reiners, A. : 2012, *Living Rev. Solar Phys.* 9
- Reiners, A. and Basri, G. : 2010, *The Astrophysical Journal* **710**, 924
- Reiners, A., Basri, G., and Christensen, U. R. : 2009, *The Astrophysical Journal* **697**, 373

- Reiners, A. and Schmitt, J. H. M. M. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **384**(1), 155
- Rempel, M. : 2004, *The Astrophysical Journal* **607**, 1046
- Rempel, M. : 2005a, *The Astrophysical Journal* **631**, 1286
- Rempel, M. : 2005b, *The Astrophysical Journal* **622**, 1320
- Rempel, M. : 2006, *The Astrophysical Journal* **647**, 662
- Rempel, M. : 2007, *The Astrophysical Journal* **655**, 651
- Rempel, M., Schüssler, M., and Knölker, M. : 2009, *The Astrophysical Journal* **691**, 640
- Rheinhardt, M. and Brandenburg, A. : 2010, *Astronomy and Astrophysics* **520**, 28
- Richard, O., Michaud, G., and Richer, J. : 2001, *The Astrophysical Journal* **558**, 377
- Rieutord, M. and Rincon, F. : 2010, *Living Rev. Solar Phys.* **7**
- Rieutord, M., Roudier, T., Malherbe, J. M., and Rincon, F. : 2000, *Astronomy and Astrophysics* **357**, 1063
- Rüdiger, G. and Arlt, R. : 2003, *Advances in nonlinear dynamos* **9**, 147
- Rincon, F. : 2007, Vol. 239, pp 58–63, Proceedings of the International Astronomical Union
- Rincon, F., Lignières, F., and Rieutord, M. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **430**, L57
- Roberts, G. O. : 1972, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **271**, 411
- Roberts, P. H. : 1988, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **44**, 3
- Roberts, P. H. and Soward, A. M. : 1978, *Rotating fluids in geophysics*
- Roberts, P. H. and Stix, M. : 1972, *Astronomy and Astrophysics* **18**, 453
- Robinson, F. J., Demarque, P., Li, L. H., Sofia, S., Kim, Y.-C., Chan, K. L., and Guenther, D. B. : 2003, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **340**, 923
- Robinson, R. D. : 1980, *The Astrophysical Journal* **239**, 961
- Robinson, R. D., Worden, S. P., and Harvey, J. W. : 1980, *The Astrophysical Journal Letters* **236**, L155
- Rogers, T. M. and Glatzmaier, G. A. : 2005, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **364**, 1135
- Rogers, T. M. and Glatzmaier, G. A. : 2006, *The Astrophysical Journal* **653**, 756
- Romanova, M. M., Ustyugova, G. V., Koldoba, A. V., and Lovelace, R. V. E. : 2002, *The Astrophysical Journal* **578**, 420
- Rüdiger, G. and Kitchatinov, L. L. : 1997, *Astronomische Nachrichten* **318**, 273
- Ruediger, G. : 1989, *Differential rotation and stellar convection. Sun and the solar stars*
- Ruediger, G. and Brandenburg, A. : 1995, *Astronomy and Astrophysics* **296**, 557
- Russell, C. T. : 1980, *Reviews of Geophysics and Space Physics* **18**, 77

- Rädler, K.-H. and Rheinhardt, M. : 2007, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **101**, 117
- Rüdiger, G., Kitchatinov, L. L., Küker, M., and Schultz, M. : 1994, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **78**, 247
- Saar, S. : 2002, Vol. 277, p. 311, ASP Conference Series
- Saar, S. H. : 2009, Vol. 416, p. 375, ASP Conference Series
- Saar, S. H. and Brandenburg, A. : 1999, *The Astrophysical Journal* **524**, 295
- Schekochihin, A. A., Isakov, A. B., Cowley, S. C., McWilliams, J. C., Proctor, M. R. E., and Yousef, T. A. : 2007, *New Journal of Physics* **9**, 300
- Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., Hoeksema, J. T., Kosovichev, A. G., Schou, J., Rosenberg, W., Springer, L., Tarbell, T. D., Title, A., Wolfson, C. J., Zayer, I., and Team, M. E. : 1995, *Solar Physics* **162**, 129
- Scherrer, P. H., Wilcox, J. M., Svalgaard, L., Duvall, T. L., Dittmer, P. H., and Gustafson, E. K. : 1977, *Solar Physics* **54**, 353
- Schlattl, H. and Weiss, A. : 1999, *Astronomy and Astrophysics* **347**, 272
- Schleicher, D. R. G., Banerjee, R., Sur, S., Arshakian, T. G., Klessen, R. S., Beck, R., and Spaans, M. : 2010, *Astronomy and Astrophysics* **522**, 115
- Schmitt, D., Schuessler, M., and Ferriz-Mas, A. : 1996, *Astronomy and Astrophysics* **311**, L1
- Schou, J., Antia, H. M., Basu, S., Bogart, R. S., Bush, R. I., Chitre, S. M., Christensen-Dalsgaard, J., di Mauro, M. P., Dziembowski, W. A., Eff-Darwich, A., Gough, D. O., Haber, D. A., Hoeksema, J. T., Howe, R., Korzennik, S. G., Kosovichev, A. G., Larsen, R. M., Pijpers, F. P., Scherrer, P. H., Sekii, T., Tarbell, T. D., Title, A. M., Thompson, M. J., and Toomre, J. : 1998, *The Astrophysical Journal* **505**, 390
- Schou, J. and Bogart, R. S. : 1998, *The Astrophysical Journal Letters* **504**, L131
- Schrijver, C. J. : 2001, *The Astrophysical Journal* **547**, 475
- Schrijver, C. J., Cote, J., Zwaan, C., and Saar, S. H. : 1989, *The Astrophysical Journal* **337**, 964
- Schrijver, C. J. and Zwaan, C. : 2000, *Solar and Stellar Magnetic Activity*
- Schrinner, M. : 2011, *Astronomy and Astrophysics* **533**, 108
- Schrinner, M., Petitdemange, L., and Dormy, E. : 2012, *The Astrophysical Journal* **752**, 121
- Schrinner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M., and Christensen, U. : 2005, *Astronomische Nachrichten* **326**, 245
- Schrinner, M., Rädler, K.-H., Schmitt, D., Rheinhardt, M., and Christensen, U. R. : 2007, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **101**, 81
- Schwabe, M. : 1844, *Astronomische Nachrichten* **21**, 233
- Schwer, K., Lilly, R. B., Thompson, B. J., and Brewer, D. A. : 2002, *AGU Fall Meeting Abstracts* **21**, 01
- Schüssler, M. : 2001, Vol. 236, p. 343, ASP Conference Series

- Semel, M. : 1989, *Astronomy and Astrophysics* **225**, 456
- Shukurov, A. : 2004, *arXiv :astro-ph/0411739*
- Simitev, R. D. and Busse, F. H. : 2009, *EPL (Europhysics Letters)* **85**, 19001
- Skumanich, A. : 1972, *The Astrophysical Journal* **171**, 565
- Sokoloff, D. : 2004, *Solar Physics* **224**, 145
- Solanki, S. K., Barthol, P., Danilovic, S., Feller, A., Gandorfer, A., Hirzberger, J., Riethmüller, T. L., Schüssler, M., Bonet, J. A., Martínez Pillet, V., del Toro Iniesta, J. C., Domingo, V., Palacios, J., Knölker, M., Bello González, N., Berkefeld, T., Franz, M., Schmidt, W., and Title, A. M. : 2010, *The Astrophysical Journal Letters* **723**, L127
- Souffrin, P. : 1972, *Astronomy and Astrophysics* **17**, 458
- Soward, A. M. : 1979, *Physics of the Earth and Planetary Interiors* **20**, 134
- Soward, A. M. : 2003, in *Advances in Nonlinear Dynamics*, p. 224
- Spada, F., Lanzafame, A. C., and Lanza, A. F. : 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **404**, 641
- Spalart, P. R., Moser, R. D., and Rogers, M. M. : 1991, *Journal of Computational Physics* **96**, 297
- Spiegel, E. A. : 2009, in *The Origin and Dynamics of Solar Magnetism, Space Sciences Series of ISSI, Volume 32. ISBN 978-1-4419-0238-2. Springer New York, 2009, p. 25*, p. 25
- Spiegel, E. A. and Zahn, J.-P. : 1992, *Astronomy and Astrophysics* **265**, 106
- Spoerer, F. W. G. : 1890, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **50**, 251
- Spruit, H. C. : 2002, *Astronomy and Astrophysics* **381**, 923
- Spruit, H. C. : 2003, *Solar Physics* **213**, 1
- Stanley, S. and Glatzmaier, G. A. : 2010, *Space Science Reviews* **152(1-4)**, 617
- Stefani, F., Xu, M., Gerbeth, G., Ravelet, F., Chiffaudel, A., Daviaud, F., and Leorat, J. : 2006, *European Journal of Mechanics B Fluids* **25**, 894
- Stein, R. F. : 2012, *Living Rev. Solar Phys.* **9**
- Stein, R. F., Benson, D., Georgobiani, D., and Nordlund, A. : 2006a, Vol. 624, p. 79, ESA Special Publication
- Stein, R. F., Benson, D., and Nordlund, A. : 2006b, Vol. 17, p. 15, IAU Joint Discussion
- Stein, R. F., Bercik, D., and Nordlund, A. : 2002, *Nuovo Cimento C Geophysics Space Physics C* **25**, 513
- Stein, R. F. and Nordlund, A. : 2003, Vol. 288, p. 519, ASP Conference Series
- Stenflo, J. O. : 2012, *Astronomy and Astrophysics* **541**, 17
- Stevenson, D. J. : 1979, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics* **12**, 139
- Stevenson, D. J. : 2003, *Earth and Planetary Science Letters* **208**, 1

- Stieglitz, R. and Müller, U. : 2001, *Physics of Fluids* **13**, 561
- Stix, M. : 1976, *Astronomy and Astrophysics* **47**, 243
- Straus, J. M., Blake, J. B., and Schramm, D. N. : 1976, *The Astrophysical Journal* **204**, 481
- Strugarek, A., Brun, A. S., and Zahn, J.-P. : 2011, *Astronomy and Astrophysics* **532**, 34
- Stuiver, M. and Quay, P. D. : 1980, *Science* **207**, 11
- Svalgaard, L. : 2010, Vol. 428, p. 297, ASP Conference Series
- Thelen, J.-C. and Cattaneo, F. : 2000, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **315**, L13
- Thompson, J. M. T. and Sammonds, P. R. : 2007, *Advances in Earth Science : From Earthquakes to Global Warming*, Imperial College Press
- Thompson, M. J., Christensen-Dalsgaard, J., Miesch, M. S., and Toomre, J. : 2003, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **41**, 599
- Tobias, S. M. : 1996, *Astronomy and Astrophysics* **307**, L21
- Tobias, S. M. : 1997, *Astronomy and Astrophysics* **322**, 1007
- Tobias, S. M. : 2002, *Astronomische Nachrichten* **323**, 417
- Tobias, S. M., Brummell, N. H., Clune, T. L., and Toomre, J. : 2001, *The Astrophysical Journal* **549**, 1183
- Tohline, J. E. : 2002, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **40(1)**, 349
- Tremblin, P. : 2012, *Ph.D. thesis*, Université Paris-Diderot - Paris VII
- Turck-Chièze, S., Däppen, W., Fossat, E., Provost, J., Schatzman, E., and Vignaud, D. : 1993, *Physics Reports* **230**, 57
- Ud-Doula, A., Owocki, S. P., and Townsend, R. H. D. : 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **392**, 1022
- Ulrich, R. K. : 2010, *The Astrophysical Journal* **725**, 658
- Usoskin, I. G., Mursula, K., and Kovaltsov, G. A. : 2001, *Journal of Geophysical Research* **106**, 16039
- Usoskin, I. G., Solanki, S. K., and Kovaltsov, G. A. : 2007, *Astronomy and Astrophysics* **471**, 301
- Vainshtein, S. I. and Cattaneo, F. : 1992, *The Astrophysical Journal* **393**, 165
- Vainshtein, S. I. and Zel'dovich, Y. B. : 1972, *Soviet Physics Uspekhi* **15**, 159
- Valet, J.-P. : 2003, *Reviews of Geophysics* **41**, 1004
- Vasil, G. M. and Brummell, N. H. : 2008, *The Astrophysical Journal* **686**, 709
- Vasil, G. M. and Brummell, N. H. : 2009, *The Astrophysical Journal* **690**, 783
- Verhille, G., Plihon, N., Bourgoin, M., Odier, P., and Pinton, J.-F. : 2010, *Space Science Reviews* **152**, 543
- Verma, M. K. : 2004, *Physics Reports* **401**, 229

- Verner, G. A., Elsworth, Y., Chaplin, W. J., Campante, T. L., Corsaro, E., Gaulme, P., Hekker, S., Huber, D., Karoff, C., Mathur, S., Mosser, B., Appourchaux, T., Ballot, J., Bedding, T. R., Bonanno, A., Broomhall, A.-M., García, R. A., Handberg, R., New, R., Stello, D., Régulo, C., Roxburgh, I. W., Salabert, D., White, T. R., Caldwell, D. A., Christiansen, J. L., and Fanelli, M. N. : 2011, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **415**, 3539
- Vilhu, O. : 1984, *Astronomy and Astrophysics* **133**, 117
- Vilhu, O. and Walter, F. M. : 1987, *The Astrophysical Journal* **321**, 958
- Vogt, S. S. and Hatzes, A. P. : 1991, Vol. 380, p. 297, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag
- Vogt, S. S. and Penrod, G. D. : 1983, *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* **95**, 565
- Vogt, S. S., Penrod, G. D., and Hatzes, A. P. : 1987, *The Astrophysical Journal* **321**, 496
- Vorontsov, S. V., Christensen-Dalsgaard, J., Schou, J., Strakhov, V. N., and Thompson, M. J. : 2002, *Science* **296**, 101
- Vögler, A., Shelyag, S., Schüssler, M., Cattaneo, F., Emonet, T., and Linde, T. : 2005, *Astronomy and Astrophysics* **429**, 335
- Wade, G. A., Alecian, E., Bohlender, D. A., Bouret, J.-C., Grunhut, J. H., Henrichs, H., Neiner, C., Petit, V., Louis, N. S., Auriere, M., Kochukhov, O., Silvester, J., ud Doula, A., and Collaboration, t. M. : 2008, *arXiv :0812.4078*
- Wade, G. A., Maíz Apellániz, J., Martins, F., Petit, V., Grunhut, J., Walborn, N. R., Barbá, R. H., Gagné, M., García-Melendo, E., Jose, J., Moffat, A. F. J., Nazé, Y., Neiner, C., Pellerin, A., Penadés Ordaz, M., Shultz, M., Simón-Díaz, S., and Sota, A. : 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **425**, 1278
- Walder, R., Folini, D., and Meynet, G. : 2012, *Space Science Reviews* **166**, 145
- Walter, F. M. and Bowyer, S. : 1981, *The Astrophysical Journal* **245**, 671
- Wang, Y.-M., Nash, A. G., and Sheeley, N. R. : 1989a, *The Astrophysical Journal* **347**, 529
- Wang, Y.-M., Nash, A. G., and Sheeley, N. R. : 1989b, *Science* **245**, 712
- Wang, Y.-M. and Sheeley, N. R. : 1991, *The Astrophysical Journal* **375**, 761
- Weber, E. J. and Davis, L. : 1967, *The Astrophysical Journal* **148**, 217
- Weber, M. A., Fan, Y., and Miesch, M. S. : 2011, *The Astrophysical Journal* **741**, 11
- Weiss, N. O. : 1981, *Journal of Geophysical Research* **86**, 11689
- Weiss, N. O. : 1990, *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A* **330**, 617
- West, A. A., Hawley, S. L., Bochanski, J. J., Covey, K. R., Reid, I. N., Dhital, S., Hilton, E. J., and Masuda, M. : 2008, *The Astronomical Journal* **135**, 785
- West, A. A., Hawley, S. L., Walkowicz, L. M., Covey, K. R., Silvestri, N. M., Raymond, S. N., Harris, H. C., Munn, J. A., McGehee, P. M., Ivezic, Z., and Brinkmann, J. : 2004, *The Astronomical Journal* **128**, 426
- Wilson, O. C. : 1966, *The Astrophysical Journal* **144**, 695

- Wilson, O. C. : 1978, *The Astrophysical Journal* **226**, 379
- Wolf, R. : 1861, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **21**, 77
- Wong, V. C. and Lilly, D. K. : 1994, *Physics of Fluids* **6**, 1016
- Wood, T. S. and McIntyre, M. E. : 2007, Vol. 948, pp 303–308, American Institute of Physics Conference Series
- Wright, N. J., Drake, J. J., Mamajek, E. E., and Henry, G. W. : 2011, *The Astrophysical Journal* **743**, 48
- Xiong, D. R. and Deng, L. : 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **395**, 2013
- Yang, H., Johns-Krull, C. M., and Valenti, J. A. : 2007, *The Astronomical Journal* **133**, 73
- Yeates, A. R., Nandy, D., and Mackay, D. H. : 2008, *The Astrophysical Journal* **673**, 544
- Yoshimura, H. : 1975, *The Astrophysical Journal* **201**, 740
- Yoshimura, H. : 1978, *The Astrophysical Journal* **226**, 706
- Zaatri, A., Komm, R., González Hernández, I., Howe, R., and Corbard, T. : 2006, *Solar Physics* **236**, 227
- Zahn, J.-P. : 1991, *Astronomy and Astrophysics* **252**, 179
- Zahn, J.-P. : 1992, *Astronomy and Astrophysics* **265**, 115
- Zahn, J.-P., Talon, S., and Matias, J. : 1997, *Astronomy and Astrophysics* **322**, 320
- Zandbergen, P. J. and Dijkstra, D. : 1987, *Annual Review of Fluid Mechanics* **19**, 465
- Zeeman, P. : 1897, *The Astrophysical Journal* **5**, 332
- Zhao, J., Couvidat, S., Bogart, R. S., Parchevsky, K. V., Birch, A. C., Duvall, T. L., Beck, J. G., Kosovichev, A. G., and Scherrer, P. H. : 2012, *Solar Physics* **275**, 375
- Ziegler, U. and Rüdiger, G. : 2003, *Astronomy and Astrophysics* **401**, 433
- Zinnecker, H. and Yorke, H. W. : 2007, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **45**, 481
- Švanda, M., Kosovichev, A. G., and Zhao, J. : 2007, *The Astrophysical Journal Letters* **670**, L69
- Švanda, M., Kosovichev, A. G., and Zhao, J. : 2008, *The Astrophysical Journal Letters* **680**, L161



## Cinquième partie

# Annexes

## Nombres sans dimension

**TABLE A.1** – Définitions des symboles utilisés dans la Table A.2.

Nom	Symbole
Longueur	$L$
Vitesse	$v$
Fréquence de rotation	$\Omega_0$
Temps de retournement convectif	$\tau$
Viscosité	$\nu$
Diffusivité thermique	$\kappa$
Diffusivité magnétique	$\eta$
Densité	$\rho$
Champ magnétique	$B_0$
Vorticité	$\omega$
Flux de chaleur convectif	$F_{\text{conv}}$
Flux de chaleur radiatif (diffusion thermique)	$F_{\text{rad}}$
Flux de chaleur total	$F_{\text{tot}} = F_{\text{conv}} + F_{\text{rad}}$

**TABLE A.2** – Noms et définitions des nombres sans dimension utilisées dans ce manuscrit et qui utilise les notations introduites dans la Table A.1. Le terme 1 (respectivement 2) donne l’effet physique qui domine lorsque le nombre sans dimension est très grand (respectivement petit) devant 1.

Nom	Symbole	Définition	Terme 1	Terme 2
Reynolds	$R_e$	$vL/\nu$	Inertie	Viscosité
Reynolds magnétique	$R_m$	$vL/\eta$	Inertie	Diffusivité magnétique
Prandtl	$P_r$	$\nu/\kappa$	Viscosité	Diffusivité thermique
Prandtl magnétique	$P_m$	$\nu/\eta$	Viscosité	Diffusivité magnétique
Mach	$M_a$	$v/c_s$	Vitesse du fluide	Vitesse du son
Péclet	$P_e$	$vL/\kappa$	Inertie	Diffusivité thermique
Taylor	$T_a$	$4\Omega_0^2 L^4/\nu^2$	Force de Coriolis	Viscosité
Rayleigh	$R_a$	$\left(-\frac{\partial \rho}{\partial S}\right) \Delta S g L^3 / \rho \nu \kappa$	Flottaison	Dissipation
Nusslet	$N$	$F_{\text{tot}}/F_{\text{rad}}$	Flux de chaleur total	Flux de chaleur radiatif
Rossby fluide	$R_{of}$	$\omega/2\Omega_0$	Inertie	Force de Coriolis
Rossby stellaire	$R_{os}$	$P_{\text{rot}}/\tau$	Inertie	Force de Coriolis
Rossby convectif	$R_{oc}$	$\sqrt{R_a/T_a P_r}$	Inertie	Force de Coriolis
Elsasser toroidal	$\Lambda_t$	$B_0^2/4\pi\rho\eta\Omega_0$	Force de Laplace	Force de Coriolis
Elsasser poloidal	$\Lambda_p$	$B_0^2 L/4\pi\rho\eta v$	Force de Laplace	Advection
Knudsen	$K_n$	$\Lambda_{\text{mfp}}/L$	Libre parcours moyen	Distance caractéristique
Indice plasma	$\beta$	$8\pi n k_b T/B_0^2$	Pression thermodynamique	Pression magnétique

**TABLE A.3** – Valeurs typiques de quelques nombres sans dimension dans la zone convective solaire.

Paramètre	Valeur typique
$R_e$	$10^{11}$
$P_r$	$10^{-6}$
$P_m$	$10^{-2}$
$R_m$	$10^9$



---

## Le code STellar ELEMENTS (STELEM)

---

La description faite dans cette Annexe du code STELEM s'appuie sur celle faite dans [Jouve and Brun \(2007\)](#) et [Jouve \(2008\)](#).

### B.1 La méthodes des éléments finis

#### Les éléments finis

[Burnett \(1987\)](#) expose très clairement une procédure pour mettre au point une méthode de résolution par éléments finis pour les équations du type de celles que nous avons à résoudre. C'est la procédure en 12 étapes, qui reprend concrètement l'ensemble des étapes de la formulation mathématique de la méthode des éléments finis. Les 6 premières étapes constituent le développement théorique et les 6 autres l'implémentation numérique proprement dite de la méthode.

Nous avons ici à résoudre une équation du type :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{N}(u) = F \text{ dans } \mathcal{D} \quad (\text{B.1})$$

avec certaines conditions sur le bord de  $\mathcal{D}$  (les conditions aux limites) et une condition initiale,  $\mathcal{N}$  étant un opérateur différentiel non linéaire.

#### La méthode de Galerkin

Nous considérons une base orthogonale de fonctions à support compact  $\mathcal{C}^n$   $(\phi_i)_{i=0..N}$  d'un sous-espace de dimension  $N$  de l'espace de Hilbert dans lequel on cherche la solution  $u$ . Ainsi, la solution approchée  $\tilde{u}$  se projette sur cette base en :

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) \phi_i(x) \quad (\text{B.2})$$

Notons que les  $a_i$ , projections de  $\tilde{u}$  sur chaque fonction de base, dépendent du temps par séparation des variables. Ainsi, le résidu  $R = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + \mathcal{N}(\tilde{u}) - F \neq 0$  car  $\tilde{u}$  est justement une solution approchée. Nous cherchons donc évidemment les coefficients  $a_i$  qui minimisent  $R$ . Pour cela, nous utilisons la méthode de Galerkin qui consiste à rendre le produit scalaire de  $R$  avec chaque fonction de base nul. Ainsi,  $R$  est multiplié par chaque  $\phi_k$ . Puis la quantité est intégrée sur tout le domaine  $\mathcal{D}$  et ceci pour tout  $k$  de 0 à  $N$ , on veut donc résoudre :

$$\forall k \int_{\mathcal{D}} R \phi_k dx = 0 \quad (\text{B.3})$$

Par exemple, si  $\mathcal{N}(u) = \Delta(u)$ , le laplacien, on devra résoudre :

$$\forall k \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \phi_k dx = \int_{\mathcal{D}} \Delta(\tilde{u}) \phi_k dx + \int_{\mathcal{D}} F \phi_k dx \quad (\text{B.4})$$

### Intégration par parties

Nous intégrons ensuite les quantités obtenues par parties (ou plus généralement en utilisant une formule de Gauss en dimension plus élevée) de façon à faire disparaître les termes de plus haut degré (en termes de dérivation en espace). Nous allons alors obtenir des termes de bord que les conditions aux limites vont nous aider à contrôler. Nous mettons ici donc en place la formulation variationnelle du problème.

Pour notre exemple, ceci nous donne donc :

$$\forall k \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \phi_k + \int_{\mathcal{D}} \nabla \tilde{u} \nabla \phi_k = \underbrace{\int_{\partial \mathcal{D}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \phi_k}_{\text{terme de bord}} + \int_{\mathcal{D}} F \phi_k \quad (\text{B.5})$$

### Substitution de la projection de $\tilde{u}$

Nous remplaçons  $\tilde{u}$  par sa projection sur les fonctions tests, ce qui nous donne  $N+1$  équations faisant intervenir les coefficients  $a_i$ , des intégrales de produits de fonctions tests, le terme  $F$  multiplié par chaque  $\phi_k$  et les termes de bord. Nous pouvons dès lors écrire notre problème sous forme matricielle :

$$[C] \frac{\partial}{\partial t} [\tilde{u}] + [K] [\tilde{u}] = [L] \quad (\text{B.6})$$

La matrice  $C$ , appelée matrice de capacité, comporte les produits scalaires des fonctions tests. La matrice  $K$ , appelée matrice de rigidité, contient les termes d'intégration des opérateurs intervenant dans  $\mathcal{N}$  appliqués aux fonctions tests. Le second membre  $L$ , est lui constitué du produit scalaire de  $F$  avec les fonctions tests ainsi que des termes d'intégration sur les bords du domaine. Le vecteur  $[u]$  est le vecteur des coefficients  $a_i(t)$  recherchés.

Pour notre exemple, on obtient :

$$\forall k \sum_{i=0}^N \int_{\mathcal{D}} a_i'(t) \phi_i \phi_k + \sum_{i=0}^N \int_{\mathcal{D}} a_i(t) \nabla \phi_i \nabla \phi_k = \sum_{i=0}^N \int_{\partial \mathcal{D}} a_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \phi_k + \sum_{i=0}^N \int_{\mathcal{D}} f_i(t) \phi_i \phi_k \quad (\text{B.7})$$

Les matrices s'écrivent donc ici :

$$C_{ij} = \int_{\mathcal{D}} \phi_i \phi_j K_{ij} = \int_{\mathcal{D}} \nabla \phi_i \nabla \phi_j L_{ij} = \int_{\partial \mathcal{D}} a_i(t) \frac{\partial \phi_i}{\partial n} \phi_j + \int_{\mathcal{D}} f_i(t) \phi_i \phi_j \quad (\text{B.8a})$$

### Le choix des fonctions de base

Les fonctions tests sont choisies de manière à valoir 1 à un noeud du maillage et 0 à tous les autres (soit  $\phi_j(x_i) = \delta_{ij}$ ). Elles sont très souvent choisies polynomiales (donc très régulières) et peuvent être de degré variable suivant la précision du calcul que l'on demande et la complexité (et l'ordre) de l'équation à résoudre. Dans notre cas, nous utiliserons les polynômes de Lagrange, de degré 1 (linéaire :  $\phi_j(x) = \frac{x-x_i}{x_j-x_i}$  entre  $x_i$  et  $x_j$  et 0 ailleurs) ou parfois 2 (quadratique :  $\phi_j(x) = \frac{(x-x_i)(x-x_k)}{(x_j-x_i)(x_j-x_k)}$  entre  $x_i$  et  $x_k$ ,  $x_j$  étant un noeud intérieur au segment  $[x_i x_k]$  et 0 ailleurs).

### Substitution des expressions des fonctions de base

Nous introduisons dans cette étape les expressions des fonctions tests et de leurs dérivées successives dans les matrices de capacité et de rigidité et dans le second membre. Nous terminons ici la partie analyse théorique et préparation de l'équation pour le traitement numérique. Reste maintenant à introduire toutes les données numériques dans notre problème matriciel.

### Spécification des données numériques

Nous introduisons ici les données numériques c'est-à-dire les coordonnées des points du bord : les deux points extrêmes en dimension 1, la courbe délimitant le bord en dimension 2 et la surface en dimension 3 par exemple. Nous évaluons ensuite tous les termes exceptés les termes de bord dans les équations c'est-à-dire que nous calculons les intégrales. Ici, elles seront évaluées par des formules de quadrature de Gauss-Legendre.

### Introduction des conditions aux limites

C'est une des étapes les plus délicates. Nous considérons ici seulement les conditions aux limites de Neumann (la valeur du flux sur le bord est imposée) ou de Dirichlet (la valeur de la fonction sur le bord est imposée). Les flux sur le bord apparaissant explicitement dans le second membre (puisque l'on a intégré par parties), on peut remplacer sa valeur directement, il est donc très facile de l'intégrer au problème. Par contre, l'application d'une condition de Dirichlet est plus difficile puisque la valeur de  $u$  aux bords n'apparaît pas explicitement dans le système. Nous appliquons donc directement la condition aux limites aux fonctions de base, ce qui donne des relations entre les coefficients  $a_i$ . Ainsi, un ou plusieurs coefficients peuvent être exprimés en fonction des autres, ce qui permet de réduire le nombre d'équations. De cette manière, la solution approchée satisfera automatiquement les conditions aux limites de Dirichlet.

Dans notre exemple où  $\mathcal{N}(u) = \Delta(u)$ , on voit par exemple apparaître le terme  $\int_{\partial\mathcal{D}} \partial\phi_i/\partial n \phi_j$ . Si on a des conditions de Neumann homogènes, ce terme disparaît car  $\partial\phi_i/\partial n = 0$  sur le bord et si on a des conditions de Dirichlet homogènes, il disparaît car  $\phi_j = 0$  sur le bord. En termes de formulation mathématique, cela revient à chercher la solution sur un espace plus restreint, dont les éléments satisfont certaines conditions. Par exemple, pour des conditions aux limites de Dirichlet  $u = 0$  sur le bord, les fonctions tests sont choisies dans  $H_0^1$  (espace de Sobolev où les éléments sont à trace nulle) et non dans tout  $H^1$ .

### Finalisation

Il reste maintenant à résoudre le système, reconstruire la solution  $\tilde{u}$  et évaluer sa précision.

## B.2 Intégrations spatiale et temporelle

Le code en Fortran 90 utilisé ici a été adapté par [Charbonneau and Emonet \(1998\)](#) à partir des routines Fortran 77 de [Burnett \(1987\)](#) pour résoudre des EDP du deuxième ordre générales. La méthode de Burnett appliquée dans un cas simple a été étendue au cas beaucoup plus complexe des équations de la dynamo. Il y a fourni un très gros effort de développement qui a permis au code STELEM d'être aujourd'hui utile à la communauté du magnétisme solaire et stellaire. Nous l'avons adapté aux problèmes de la dynamo solaire de type  $\alpha^2$ ,  $\alpha^2\Omega$ , Babcock-Leighton et Babcock-Leighton multicellulaire.

### Réécriture des équations

Nous sommes ici en coordonnées sphériques et nous nous sommes placés dans l'hypothèse d'axi-symétrie. Les équations de la dynamo en champ moyen (2.43) font intervenir régulièrement le facteur  $\varpi = r \sin \theta$ . On choisit de simplifier les équations en résolvant non pas  $A_\phi$  et  $B_\phi$  mais les inconnues  $A = \frac{A_\phi}{\varpi}$  et  $B = \frac{B_\phi}{\varpi}$ . Nous obtenons alors de nouvelles équations :



$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\eta}{\varpi} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) (\varpi A) - \frac{\mathbf{v}_p}{\varpi^2} \cdot \nabla (\varpi^2 A) + \text{terme source} \quad (\text{B.9a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B}{\partial t} = & \frac{\eta}{\varpi} \left( \nabla^2 - \frac{1}{\varpi^2} \right) (\varpi B) + \frac{1}{\varpi^2} \frac{\partial(\varpi^2 B)}{\partial r} \frac{\partial \eta}{\partial r} - \mathbf{v}_p \cdot \nabla (B) \\ & + (\nabla \times (\varpi^2 A \hat{\mathbf{e}}_\phi)) \cdot \nabla \Omega + \text{terme d'effet } \alpha \text{ éventuel} \end{aligned} \quad (\text{B.9b})$$

Nous procédons au changement de variables  $x = -\cos \theta$  et  $z = r$ . Enfin, la dernière étape consiste à adimensionaliser les équations. Pour ceci, nous choisissons comme échelle spatiale le rayon solaire  $R$  et comme échelle temporelle le temps diffusif dans l'enveloppe convective  $\frac{R^2}{\eta_t}$  où  $\eta_t$  est la diffusivité turbulente c'est-à-dire dans l'enveloppe convective. De cette manière, la longueur  $x'$  et le temps  $t'$  sont tels que  $x' = \frac{x}{R}$  et  $t' = \frac{t}{R^2/\eta_t}$ . Chaque "ingrédient" de la dynamo doit s'écrire comme un produit d'une constante contenant la dimension de chaque "ingrédient" et d'une grandeur sans dimension. Ainsi, on écrira par la suite :

- pour l'effet alpha dans les dynamos  $\alpha^2, \alpha\Omega$  ou  $\alpha^2\Omega$  :  $\alpha = \alpha_0 \alpha'$  où  $\alpha_0$  est en  $\text{cm.s}^{-1}$ ,
- pour le terme source de surface dans les dynamos de type Babcock-Leighton :  $S = s_0 S'$  où  $s_0$  est en  $\text{cm.s}^{-1}$ ,
- pour l'effet  $\Omega$  :  $\Omega = \Omega_0 \Omega'$  où  $\Omega_0$  est en  $\text{s}^{-1}$ ,
- pour la circulation méridienne :  $v_p = v_0 v'_p$  où  $v_0$  est en  $\text{cm.s}^{-1}$ ,
- pour le champ  $B$  :  $B = B_0 B'/R$  où  $B_0$  est en G (Gauss),
- pour le champ  $A$  tel que  $B = \nabla(A)$  :  $A = B_0 A'$ .

De cette manière, les nombres dynamos suivants vont apparaître dans les équations :  $C_\alpha = \frac{\alpha_0 R}{\eta_t}$  ou  $C_s = \frac{s_0 R}{\eta_t}$ ,  $C_\Omega = \frac{\Omega_0 R^2}{\eta_t}$  ainsi que le nombre de Reynolds magnétique  $Re = \frac{U_0 R}{\eta_t}$ , qui représentent les principaux paramètres du code et dont les variations vont dicter le comportement des différentes dynamos simulées. Ainsi, l'équation (B.9a) par exemple devient, si l'on procède à l'adimensionalisation et si l'on considère l'effet  $\alpha$  comme terme source :

$$\frac{\eta_t}{R^2} \frac{\partial B_0 A'}{\partial t'} = \frac{\eta}{R \varpi'} \left( \frac{1}{R^2} \nabla'^2 - \frac{1}{R^2 \varpi'^2} \right) (R \varpi' B_0 A') - \frac{U_0 \mathbf{U}_p'}{R^2 \varpi'^2} \cdot \nabla' (R^2 \varpi'^2 B_0 A') + \alpha_0 \alpha' \frac{B_0 B'}{R}$$

Ce qui donne donc après simplification :

$$\frac{\partial A'}{\partial t'} = \frac{\eta}{\eta_t} \frac{1}{\varpi'} \left( \nabla'^2 - \frac{1}{\varpi'^2} \right) (\varpi' A') - Re \frac{\mathbf{U}_p'}{\varpi'^2} \cdot \nabla' (\varpi'^2 A') + C_\alpha \alpha' B' \quad (\text{B.10})$$

### Résolution spatiale

Nous sommes à présent en mesure de projeter les inconnues  $A$  et  $B$  sur les fonctions tests constituant la base de l'espace "discrétisé". Le code permet en fait de trouver la solution sous forme matricielle :

$$u = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

La projection porte donc sur la solution  $u$  ci-dessus. Ainsi, on écrit la projection suivante :

$$u(x, z, t) = \sum_{i=0}^N a_i(t) \phi_i(x, z) \quad (\text{B.12})$$

où les fonctions  $\phi_i$  sont les fonctions tests qui constituent la base de l'espace où l'on cherche la solution et les  $a_i(t)$  sont les coefficients recherchés, qui seront déterminés par intégration d'une

équation différentielle ordinaire en temps. Les coefficients des deux EDP sont inclus dans une routine utilisée dans le programme principal au moment où l'on forme les termes présents dans la formulation variationnelle. Ces coefficients sont introduits de manière à ce que l'EDP portant sur  $u$  puisse s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = & a(u) + b(u) \frac{\partial u}{\partial x} + c(u) \frac{\partial u}{\partial z} + d(u) \frac{\partial}{\partial x} \left[ dd(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + f(u) \frac{\partial}{\partial z} \left[ ff(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right] \\ & + g(u) \frac{\partial}{\partial x} \left[ gg(u) \frac{\partial u}{\partial z} \right] + h(u) \frac{\partial}{\partial z} \left[ hh(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Précisons que  $a(u)$  n'a aucun rapport avec les coefficients  $a_i(t)$ . Classiquement, comme nous l'avons vu, dans la méthode des éléments finis, le principe est de multiplier l'équation par une fonction test  $\phi_k$  et d'intégrer chaque terme sur tout le domaine. Les intégrales sont calculées grâce aux formules de quadrature de Gauss donc les fonctions à intégrer sont évaluées sur les points de Gauss. Les termes de plus haut degré sont intégrés par partie donc dans notre cas :

- $a(u) + b(u) \frac{\partial u}{\partial x} + c(u) \frac{\partial u}{\partial z}$  est le seul terme qui n'est pas intégré par partie, il est multiplié par  $\phi_k$  pour tout  $k$  dans la formulation variationnelle,
- $dd(u) \frac{\partial u}{\partial x}$  ne contient que des dérivées en  $x$ . Ce terme est intégré par partie et donc une partie sera multipliée par  $\phi_k$  et une autre par sa dérivée en  $x$ ,
- de même,  $ff(u) \frac{\partial u}{\partial z}$  ne contient que des dérivées en  $z$ . Ce terme est intégré par partie et donc une partie sera multipliée par  $\phi_k$  et une autre par sa dérivée en  $z$ .

En sommant tout ceci, on obtient donc l'opérateur non linéaire qui prend comme argument les coefficients recherchés  $a_i(t)$ . Les coefficients de la matrice (appelée matrice de capacité) qui multiplie  $\frac{\partial a_i}{\partial t}$  dans le membre de gauche de l'équation sont ensuite calculés puis la matrice est inversée, ce qui nous permet d'obtenir l'équation différentielle en temps à intégrer pour pouvoir finalement reconstruire  $u$  au pas de temps suivant.

### Domaine de calcul et conditions aux limites

Le domaine de calcul est un demi-anneau s'étendant du rayon  $r = r_b$  à  $r = 1$  et de la colatitude  $\theta = 0$  à  $\pi$  soit en variables du code de  $z = r_b$  à  $z = 1$  et de  $x = -1$  à  $1$ . Comme nous l'avons vu, le domaine de calcul est, dans la méthode des éléments finis, subdivisé en régions appelées éléments. Dans notre cas, ces éléments sont rectangulaires avec un noeud à chaque sommet si on utilise une interpolation avec des polynômes de Lagrange de degré 1 (éléments Q1 Lagrange) et un noeud à chaque sommet et en chaque milieu de côté pour une interpolation quadratique (éléments Q2 Lagrange) comme on peut le voir sur la Figure B.1.

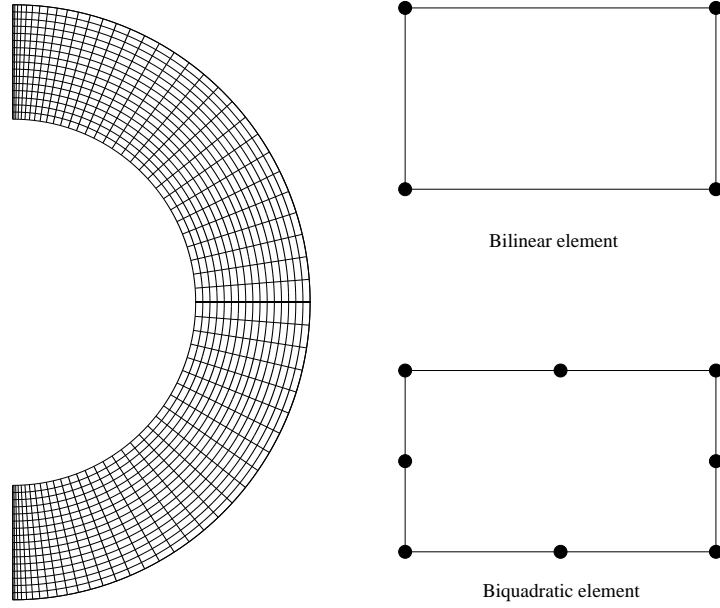
La condition à la surface  $r = 1$  peut être soit un raccordement continu à un champ radial, soit à un champ potentiel. Dans le cas d'un champ radial, les conditions devant être vérifiées sur le champ magnétique sont :

$$B_\phi(r = 1, \theta, t) = 0 \frac{\partial(rA_\phi(r, \theta, t))}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0 \quad (\text{B.14a})$$

Dans le cas d'une condition potentielle, le champ interne doit être raccordé continument à un champ vérifiant l'équation suivante :

$$\nabla \times \mathbf{B}(r, \theta, t) = 0 \quad (\text{B.15})$$

Ce qui conduit à deux équations, l'une portant sur le champ toroidal  $B_\phi(r, \theta, t)$  et l'autre sur le potentiel poloidal  $A_\phi(r, \theta, t)$  :



**FIGURE B.1** – Schéma du maillage quadrilatéral dans le plan méridien, uniforme en  $r$  et  $\theta$ . Les deux figures de droite montrent un zoom sur une cellule du maillage, dans le cas d’une interpolation bilinéaire (en haut) et biquadratique (en bas). Notons que les cellules dans le cas biquadratique ne possèdent pas de noeud intérieur.

$$\frac{\partial(\sin \theta B_\phi)}{\partial \theta} = \frac{\partial(r B_\phi)}{\partial r} = 0 \quad (\text{B.16a})$$

$$(\nabla^2 - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}) A_\phi = 0 \quad (\text{B.16b})$$

Comme nous utilisons une méthode des éléments finis, la procédure la plus pratique et naturelle d’introduire de telles conditions aux limites est de les introduire sous la forme de condition de Dirichlet (portant sur la valeur du champ à la frontière) ou de Neumann (portant sur le gradient du champ). L’équation pour  $B_\phi$  conduit facilement à  $B_\phi = C/(r \sin \theta)$  avec  $C$  une constante quelconque. La valeur de cette constante est fixée à 0, ce qui conduit donc à une condition de Dirichlet homogène sur  $B_\phi$ . La situation est plus délicate pour la condition sur  $A_\phi$ . Une solution générale à l’équation portant sur  $A_\phi$  peut s’écrire sous la forme :

$$A_\phi(r \geq R_\odot, \theta, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(t)}{r^{n+1}} P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.17})$$

où  $P_n^1(\cos \theta)$  est le polynôme de Legendre associé (Dikpati and Choudhuri, 1994). On trouve que si la somme est tronquée à  $N_\theta/2$ , c’est-à-dire le nombre de points de grille en  $\theta$ , divisé par 2, l’erreur de projection reste toujours inférieur à  $10^{-3}$ . Les coefficients  $a_n(t)$  sont les coefficients de la projection de  $R_\odot^{n+1} A_\phi(R_\odot, \theta, t)$  sur les polynômes de Legendre associés. Ils sont donc calculés en effectuant le produit scalaire de  $R_\odot^{n+1} A_\phi(R_\odot, \theta, t)$  par  $P_n^1(\cos \theta)$ , le tout divisé par la norme de  $P_n^1$ , ce qui nous donne :

$$a_n(t) = \frac{R_\odot^{n+1} \int_0^\pi A_\phi(R_\odot, \theta, t) P_n^1(\cos \theta) \sin \theta d\theta}{\int_0^\pi [P_n^1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta} \quad (\text{B.18})$$

Le changement de variable  $x = \cos(\theta)$  conduit à calculer l’intégrale sur  $[-1, 1]$  du produit de deux fonctions régulières. Cette intégrale est donc calculée numériquement en utilisant une formule de

quadrature de Gauss-Chebyshev pour laquelle la fonction de poids est  $1/\sqrt{1-x^2}$ . L'intégrale au dénominateur représente la norme du polynôme de Legendre associé, sa valeur est connue et égale à  $2n(n+1)/(2n+1)$ . Une fois les coefficients  $a_n(t)$  connus, on peut en déduire la dérivée de  $A_\phi$  en  $r = 1$  :

$$\frac{\partial A_\phi}{\partial r}\bigg|_{r=R_\odot} = - \sum_{n=1}^{N_\theta/2} \frac{(n+1)a_n(t)}{R_\odot^{n+2}} P_n^1(\cos \theta) \quad (\text{B.19})$$

et par utilisation d'un simple schéma aux différences finis, on peut imposer une condition de Dirichlet sur le potentiel poloidal en calculant la nouvelle valeur de  $A_\phi$  à la surface en fonction de la valeur aux points sur la couche immédiatement inférieure. On en déduit :

$$\begin{aligned} A_\phi(R_\odot, \theta, t) &= A_\phi(R_\odot - \Delta r, \theta, t) + \Delta r \frac{\partial A}{\partial r}\bigg|_{r=R_\odot} \\ &= A_\phi(R_\odot - \Delta r, \theta, t) - \Delta r \sum_n \frac{(n+1)a_n(t)}{R_\odot^{n+2}} P_n^1(\cos \theta) \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

A l'intérieur du même pas de temps, les coefficients  $a_n(t)$  sont ensuite recalculés en utilisant la nouvelle valeur de  $A_\phi(r = 1, \theta, t)$  ainsi obtenue jusqu'à ce que l'on obtienne une erreur suffisamment faible entre deux valeurs successives de  $A_\phi(r = 1, \theta, t)$ . Généralement, une dizaine d'itérations suffisent pour atteindre une convergence avec une erreur relative de  $10^{-3}$ .

### Résolution temporelle

Le schéma utilisé a été adapté du schéma de [Spalart et al. \(1991\)](#), du troisième ordre en temps. Nous avons à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{N}(u) \quad (\text{B.21})$$

avec  $\mathcal{N}$  notre opérateur différentiel non linéaire. Alors soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{E}$  les première et deuxième dérivées de  $\mathcal{N}$  par rapport à  $u$ ,  $\mathcal{A}$  est linéaire et  $\mathcal{E}$  est bilinéaire symétrique. On peut alors écrire le développement de  $\mathcal{N}$  à l'ordre 3 en  $u$  :

$$\mathcal{N}(u + du) = \mathcal{N}(u) + \mathcal{A}(du) + \frac{1}{2}\mathcal{E}(du, du) + o(du^3) \quad (\text{B.22})$$

Le développement de Taylor de  $u$  par rapport à  $t$  s'écrit alors :

$$u(t + \Delta t) = u + \Delta t \mathcal{N}(u) + \frac{\Delta t^2}{2} \mathcal{A}(u) + \frac{\Delta t^3}{6} [\mathcal{E}(\mathcal{N}(u), \mathcal{N}(u)) + \mathcal{A}^2(\mathcal{N}(u))] + O(\Delta t^4) \quad (\text{B.23})$$

Le schéma utilisé est en 3 étapes et permet d'avoir une précision, en accord avec le développement de Taylor ci-dessus en  $o(\Delta t^3)$ . Les trois étapes sont les suivantes. Soient  $u_n = u(t)$  et  $u_{n+1} = u(t + \Delta t)$  alors :

$$u' = u_n + \Delta t \gamma_1 \mathcal{N}(u_n) \quad (\text{B.24a})$$

$$u'' = u' + \Delta t [\gamma_2 \mathcal{N}(u') + \zeta_1 \mathcal{N}(u_n)] \quad (\text{B.24b})$$

$$u_{n+1} = u'' + \Delta t [\gamma_3 \mathcal{N}(u'') + \zeta_2 \mathcal{N}(u')] \quad (\text{B.24c})$$

Si on développe  $u_{n+1}$  de manière à l'écrire uniquement en fonction de  $u_n$  et que l'on identifie les coefficients de  $\Delta t$ ,  $\Delta t^2$  et  $\Delta t^3$  avec ceux du développement de Taylor [B.23](#), on trouve un système d'équations qui va nous permettre de déduire les coefficients  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ .

### B.3 L'effet Malkus Proctor

L'équation de Navier Stokes n'avait jamais été incluse jusqu'alors dans STELEM. On donne dans cette section l'implémentation en détails de l'effet Malkus Proctor. Dans la Section 4.2, on a démontré que l'effet Malkus Proctor était modelisé par l'effet du champ magnétique à grande échelle sur la rotation globale. On doit donc implémenter l'équation (4.14c) que l'on rappelle ici par commodité :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\phi}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho r \varpi} \left[ \frac{\partial \sin \theta \tilde{B}_\phi}{\partial \theta} \frac{\partial r \tilde{A}_\phi}{\partial r} - \frac{\partial r \tilde{B}_\phi}{\partial r} \frac{\partial \sin \theta \tilde{A}_\phi}{\partial \theta} \right] \\ & + \frac{P_m}{\rho} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[ \mu r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\mu \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{\mu}{r} \left[ 3r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) + \frac{2 \cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\phi}{\sin \theta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.25})$$

Comme nous l'avons vu dans la Section B.2, STELEM ne résoud pas  $A_\phi$ ,  $B_\phi$  directement mais les variables  $A$ ,  $B$ . On résoud alors de la même façon la variable  $\Omega = \frac{u_\phi}{r \sin \theta}$  au lieu de  $u_\phi$ . On rappelle que toutes les variables sont désormais sans dimension et l'on omettera les  $\prime$  par soucis de clarté. Les trois inconnues sont donc dorénavant :

$$\tilde{A} = \frac{\tilde{A}_\phi}{r \sin \theta} \quad (\text{B.26a})$$

$$\tilde{B} = \frac{\tilde{B}_\phi}{r \sin \theta} \quad (\text{B.26b})$$

$$\Omega = \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \quad (\text{B.26c})$$

On réalise alors le changement de variable  $z = r$  et  $x = -\cos \theta$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = & -\frac{1}{\rho \varpi} \left[ \left( \frac{\varpi^2}{z^3} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} - \frac{2x \tilde{B}}{z} \right) \left( 2\varpi \tilde{A} + \varpi z \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \right) - \left( 2\varpi \tilde{B} + \varpi z \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} \right) \left( \frac{\varpi^2}{z^3} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - \frac{2x \tilde{A}}{z} \right) \right] \\ & + \frac{P_m}{\rho} \left\{ \left[ -\frac{4\mu x}{z} \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{z} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \left[ 4\mu \sqrt{1-x^2} + z \sqrt{1-x^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right. \\ & \left. + \left[ \frac{\mu(1-x^2)^{3/2}}{z} \right] \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \left[ \mu z \sqrt{1-x^2} \right] \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

STELEM requiert d'écrire l'équation sous la forme spécifique (B.13). On donne ci après les coefficients correspondant à l'équation (B.27) :

$$a = -\frac{1}{\rho\varpi} \left[ \left( \frac{\varpi^2}{z^3} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial x} - \frac{2x\tilde{B}}{z} \right) \left( 2\varpi\tilde{A} + \varpi z \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} \right) - \left( 2\varpi\tilde{B} + \varpi z \frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} \right) \left( \frac{\varpi^2}{z^3} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} - \frac{2x\tilde{A}}{z} \right) \right] \quad (\text{B.28a})$$

$$b = \frac{P_m}{\rho} \left[ -\frac{4\mu x}{z} \sqrt{1-x^2} + \frac{(1-x^2)^{3/2}}{z} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right] \quad (\text{B.28b})$$

$$c = \frac{P_m}{\rho} \left[ 4\mu \sqrt{1-x^2} + z \sqrt{1-x^2} \frac{\partial \mu}{\partial z} \right] \quad (\text{B.28c})$$

$$d = \frac{P_m}{\rho} \left[ \frac{\mu(1-x^2)^{3/2}}{z} \right] \quad (\text{B.28d})$$

$$dd = 1 \quad (\text{B.28e})$$

$$f = \frac{P_m}{\rho} \left[ \mu z \sqrt{1-x^2} \right] \quad (\text{B.28f})$$

$$ff = 1 \quad (\text{B.28g})$$

$$g = gg = h = hh = 0 \quad (\text{B.28h})$$





---

Le code Anelastic Spherical Harmonics (ASH)

---

Le code ASH (Clune et al., 1999; Miesch et al., 2000; Brun et al., 2004) est un code qui résout les équations de la MHD (2.32) dans l'approximation anélastique et qui a été validé par un benchmark impliquant plusieurs codes de simulation (Jones et al., 2011). C'est un code global, qui permet de traiter ces équations sur une coquille tri-dimensionnelle (cf Figure C.1). Il repose sur une méthode *spectrale* et sur une approche dite *Large Eddy Simulation* (Lesieur, 2008) qui revient à paramétrer les échelles inférieures à la taille de la grille considérée, et qui ne sont donc pas résolues. Dans ce manuscrit, nous utilisons la paramétrisation la plus simple possible, qui consiste à représenter ces échelles par des coefficients de diffusion augmentés.

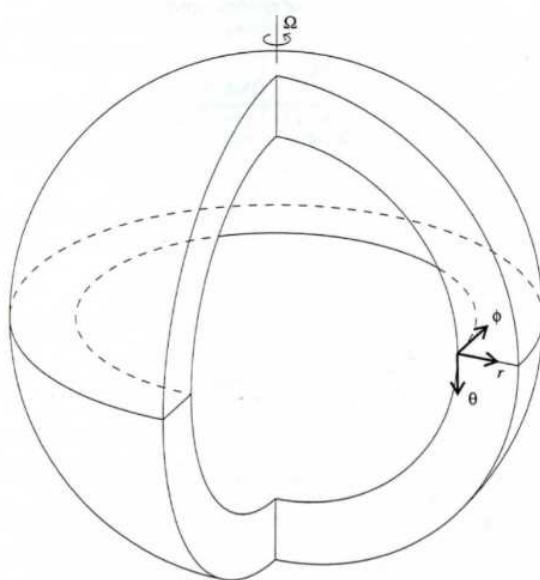


FIGURE C.1 – Domaine de résolution du code 3D ASH.

La méthode numérique du code ASH est dite pseudo-spectrale (Boyd, 1989; Glatzmaier, 1984; Clune et al., 1999). Les variables thermodynamiques et les trois composantes du flux de masse  $\bar{\rho}\mathbf{v}$  et du champ magnétique  $\mathbf{B}$  (s'il est inclus) sont projetées sur les harmoniques sphériques  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  pour leur structure horizontale, comme par exemple pour la fonction de courant poloïdale  $W$  :

$$W(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} \sum_{m=-l}^l W_l^m(r, t) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (\text{C.1})$$

Cette décomposition en harmoniques a l'avantage de permettre une résolution spatiale homogène (évitant ainsi le problème de la convergence des méridiens aux pôles) si tous les multiplets  $m$  pour un degré  $l$  sont conservés (Boyd, 1989). La précision numérique est assurée en utilisant des points de maille vérifiant la quadrature de Gauss, c'est-à-dire les zéros de polynôme de Legendre pour la colatitude et des points équidistants en longitude pour Fourier (direction azimutale). Afin d'éviter les problèmes d'*aliasing* des termes non linéaires (comme ceux d'advection qui sont calculés dans l'espace physique et ensuite transformés vers l'espace spectral (évitant ainsi de calculer des convolutions), on applique la relation de troncation  $N_\theta \geq \frac{3l_{\max}+1}{2} = 2N_\theta$ . Pour leur structure radiale nous décomposons les grandeurs physiques sur les polynômes de Chebyshev  $T_n(r_k)$ , ce qui donne (pour la composante  $W$ ) :

$$W_l^m(r_k, t) = \frac{2}{N_r - 1} \sum_{n=1}^{N_r} {}^n W_{ln}^m(t) T_n(r_k), \text{ avec } 1 \leq k \leq N_r \quad (\text{C.2})$$

où  $\sum_{n=1}^{N_r} {}^n$  sous entend que le premiers et dernier points sont multipliés par  $1/2$ . Nous réécrivons cette décomposition sous la forme matricielle suivante, utile pour la suite :

$$W_l^m(r_k, t) = \mathcal{T}_{kn} W_{ln}^m(t) \quad (\text{C.3})$$

où la sommation pour répétition d'indices s'applique à  $n$ , et  $r_k$  correspond au  $k$ -ième point de collocation Gauss-Lobatto, solution des polynômes de Chebyshev dans la direction radiale. Pour les mêmes raisons d'*aliasing* apparaissant lors du calcul des termes non linéaires, nous n'utilisons en pratique que  $N_r' = N_r - 2$  points dans la direction radiale. L'évolution temporelle des équations peut alors s'écrire (en prenant encore ici  $W$  comme variable d'exemple) :

$$\partial_t W_l^m(r_k, t) = \mathcal{L}_{lmk}^W(t) + \mathcal{N}_{ln}^W(t) \quad (\text{C.4})$$

où  $\mathcal{L}_{lmk}^W$  et  $\mathcal{N}_{ln}^W$  représentent respectivement les termes linéaires et non linéaires auxquels on a rajouté les forces de Coriolis et de Laplace. Ceci implique qu'il n'y a pas dans les termes linéaires de couplage en  $l$  et on peut alors écrire de façon formelle :

$$\mathcal{L}_{lmk}^W(t) = \mathcal{K}_{lmk}^W W_{ln}^m(t) \quad (\text{C.5})$$

où il n'y a pas de sommation sur  $l$ . Ceci permet d'écrire :

$$\partial_t \mathcal{T}_{kn} W_{ln}^m(t) = \mathcal{K}_{lmk}^W W_{ln}^m(t) + \mathcal{N}_{lmk}^W(t) \quad (\text{C.6})$$

Comme des dérivées radiales interviennent dans ces équations temporelles, il est pratique de travailler dans l'espace de Chebyshev pour les variables  $S$ ,  $P$ ,  $W$ , et  $Z$  (et  $C$  et  $A$ ). Pour discrétiser dans le temps ces équations, nous utilisons un schéma numérique temporel dit semi-implicite, basé sur un algorithme Crank-Nicholson implicite d'ordre 2 pour les termes linéaires et un algorithme Adams-Bashforth explicite d'ordre 2 pour les termes non-linéaires, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{kn} \left[ \frac{W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) - W_{ln}^m(t_\sigma)}{\Delta t} \right] &= \mathcal{K}_{lmk}^W [\alpha_{CN} W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) + (1 - \alpha_{CN}) W_{ln}^m(t_\sigma)] \\ &+ \mathcal{N}_{lmk}^W(t_\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t}{\Delta t_{\text{old}}} [\mathcal{N}_{lmk}^w(t_\sigma) - \mathcal{N}_{lmk}^W] \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

avec  $\Delta t = t_{\sigma+1} - t_\sigma$ ,  $\Delta t_{\text{old}} = t_\sigma - t_{\sigma-1}$  et  $\alpha_{CN}$  un paramètre de contrôle caractérisant la méthode de Crank-Nicholson. En réarrangeant cette équation on obtient :

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{kn} - \alpha_{CN} \Delta t \mathcal{K}_{lmk}^W) W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) = & (\mathcal{T}_{kn} + (1 - \alpha_{CN}) \Delta t \mathcal{K}_{lmk}^W) W_{ln}^m(t_\sigma) \\ & + \Delta t \mathcal{N}_{lmk}^W(t_\sigma) + \frac{1}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta t_{\text{old}}} [\mathcal{N}_{lmk}^W(t_\sigma) - \mathcal{N}_{lmk}^W(t_{\sigma-1})] \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

ce qui sous forme matricielle donne :

$$\mathcal{A}_{lkn}^W W_{ln}^m(t_{\sigma+1}) = \mathcal{B}_{lmk}^W. \quad (\text{C.9})$$

Un cycle complet du code ASH procède alors en deux étapes :

1. Premièrement, nous calculons les termes de  $\mathcal{B}^{S,P,W,Z,(C,A)}$ , dont la partie faisant intervenir les termes de Adams-Bashforth du pas de temps précédent  $t_{\sigma-1}$  est connue. Cela consiste principalement à calculer les dérivées spatiales dans l'espace spectral approprié puis à passer dans l'espace physique pour évaluer  $\mathcal{B}^{S,P,W,Z,(C,A)}$ , et enfin à revenir par transformée inverse dans l'espace spectral.
2. Deuxièmement, nous résolvons le système matriciel pour chaque membre de droite, grâce à une décomposition LU (*via* un implicite). Finalement, les solutions sont transformées depuis l'espace de Chebyshev vers l'espace physique dans la direction radiale (configuration dite primaire voir plus bas).

Avec le code ASH, toutes les transformées spectrales sont appliquées à des données locales pour chaque processeur avec des transformations inter-processeur quand nécessaire. Cela nécessite en tout trois configurations de la distribution des données sur les  $N_{\text{cpus}} - N_{\text{I/O}}$  processeurs utilisés pour les calculs :

- configuration primaire :  $l$  en processeur et  $r$  et  $m$  distribués,
- configuration pour solveur implicite :  $r$  et  $m$  en processeur et  $l$  distribué,
- configuration pour l'espace physique :  $r$ ,  $\theta$  distribués et  $\varphi$  en processeur.

La communication inter processeur utilise *MPI* (Message Passing Interface) et *SHMEM* (SHared MEMory). Bien qu'une bonne performance par processeur ait été atteinte pour les transformations (Fourier, Chebyshev, Legendre) ainsi que la partie implicite, la contrainte d'avoir les transformations locales et la représentation non triviale des données dans l'espace spectral empêchent toute distribution simple des données et de la charge par processeur (tel que  $N_{\text{cpus}} = N_{\text{rad}} \times N_{\text{ang}} + N_{\text{I/O}}$ , cf [Clune et al. \(1999\)](#) pour une discussion plus complète). La stratégie a donc été d'utiliser des pointeurs, des tables d'accès et une allocation dynamique de la mémoire pour morceler les données en blocs pouvant chacun être manipulés efficacement par un processeur et de distribuer ces blocs intelligemment à partir d'une évaluation préalable de la charge que chacun représente. Pour les problèmes de grande taille, la transformée de Legendre domine le temps de calcul et un effort particulier a été fait pour en améliorer les performances (prise en compte de la symétrie équatoriale, bloc tenant dans la cache processeur et réutilisation des tableaux). L'utilisation de routines numériques spécifiques machine comme les numériques pour l'algèbre linéaire de types LAPACK maximise l'efficacité. Le code ASH a démontré une bonne portabilité depuis de nombreuses années, ainsi qu'une bonne "scalabilité" (environ un facteur 1.75 d'accélération pour un doublement du nombre de processeurs) sur la machine CCRT-CURIE jusqu'à 4096 cœurs. De récents développements sur le traitement de la transformée de Legendre indiquent une bonne scalabilité jusqu'à 17 000 cœurs pour des problèmes allant jusqu'à un degré  $l = 680$  (pour  $N_r = 500$ ).



---

Vorticité et vent thermique

---

Dans cette Annexe, nous allons redémontrer l'équation du vent thermique de la même façon que dans Brun (2005).

## D.1 Équation de la vorticité

Soit l'équation du mouvement dans l'approximation anélastique incluant les forces de gravité et de Coriolis dans le repère tournant à  $\mathbf{\Omega}_0 = \Omega_0 \hat{\mathbf{e}}_z = \Omega_0 (\cos \theta \hat{\mathbf{e}}_r, \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_\theta, 0)$  :

$$\bar{\rho} \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right) = -\nabla P + \rho \mathbf{g} - 2\bar{\rho} \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathcal{D} \quad (\text{D.1})$$

où  $\mathcal{D}$  est le tenseur visqueux dont les composantes sont données par l'équation (2.6) et toutes les autres variables ont leur signification usuelle. On peut réécrire l'équation du mouvement sous la forme (D.2) en utilisant la relation  $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$  et en divisant par  $\bar{\rho}$  :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} - \frac{1}{2} \nabla \mathbf{v}^2 - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P - \frac{\rho g}{\bar{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_r - 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \quad (\text{D.2})$$

Appliquons l'opérateur rotationnel à l'équation précédente (D.2) pour obtenir l'équation sur la vorticité relative  $\omega = \nabla \times \mathbf{v}$  :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = -\nabla \times (\omega_{\mathbf{a}} \times \mathbf{v}) + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \nabla \bar{\rho} \times \nabla P - \nabla \times \left( \frac{\rho g}{\bar{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_r \right) - \nabla \times \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \right) \quad (\text{D.3})$$

où on a utilisé le fait que  $\nabla \times \nabla \mathbf{f} = 0$  et  $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{a} = 0$ , et où l'on a posé  $\omega_{\mathbf{a}} = \nabla \times \mathbf{v} + 2\mathbf{\Omega}_0$  la vorticité absolue. En explicitant le premier terme du membre de droite, on obtient l'équation de la vorticité dans l'approximation anélastique :

$$\boxed{\frac{\partial \omega}{\partial t} = (\omega_{\mathbf{a}} \cdot \nabla) \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla) \omega_{\mathbf{a}} - \omega_{\mathbf{a}} (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \frac{1}{\bar{\rho}^2} \nabla \bar{\rho} \times \nabla P - \nabla \times \left( \frac{\rho g}{\bar{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_r \right) - \nabla \times \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \right)} \quad (\text{D.4})$$

## D.2 Vent thermique

À partir de l'équation pour la vorticité (D.4) et sous quelques hypothèses simplificatrices, on peut déduire l'équation pour le vent thermique. Dans le régime stationnaire et en négligeant les termes d'advection faisant intervenir  $\omega$  mais pas  $\Omega_0$ , ce qui revient à dire que l'on suppose  $R_o \ll 1$ , l'équation (D.4) devient :

$$-(2\Omega_0 \cdot \nabla) \mathbf{v} + 2\Omega_0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \bar{\rho} \times \nabla P - \nabla \times \left( \frac{\rho g}{\bar{\rho}} \hat{\mathbf{e}}_r \right) - \nabla \times \left( \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot \mathcal{D} \right) \quad (\text{D.5})$$

Considérons maintenant la composante  $\phi$  de l'équation (D.5) (cela revient à considérer les mouvements dans le plan méridien) dans le cas axisymétrique ( $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ) :

$$-2\Omega_0 \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{1}{r\bar{\rho}^2} \left( \frac{d\bar{\rho}}{dr} \frac{\partial P}{\partial \theta} \right) + \frac{g}{r\bar{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\mathcal{A}_\theta)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{A}_r}{\partial \theta} \quad (\text{D.6})$$

avec  $\frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$  et où l'on a posé :

$$\mathcal{A}_r = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathcal{D}_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \mathcal{D}_{\theta r})}{\partial \theta} - \frac{\mathcal{D}_{\theta\theta} + \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right] \quad (\text{D.7a})$$

$$\mathcal{A}_\theta = \frac{1}{\bar{\rho}} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \mathcal{D}_{r\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta \mathcal{D}_{\theta\theta})}{\partial \theta} + \frac{\mathcal{D}_{\theta r} - \cot \theta \mathcal{D}_{\phi\phi}}{r} \right] \quad (\text{D.7b})$$

On peut alors simplifier cette équation en négligeant les effets visqueux (justifié dans les étoiles si on prend la valeur moléculaire de la viscosité). On dit alors que l'on est à l'équilibre géostrophique dans lequel la force de Coriolis et le gradient de pression se compensent. On obtient alors l'équation du vent thermique :

$$\boxed{2\Omega_0 \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = -\frac{1}{r\bar{\rho}^2} \left( \frac{d\bar{\rho}}{dr} \frac{\partial P}{\partial \theta} - \frac{d\bar{P}}{dr} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)} \quad (\text{D.8})$$

Cette équation indique la variation de la vitesse horizontale du fluide en fonction de  $z$ . Cette variation est généralement due à la différence de température entre deux couches de hauteur différentes, ce qui est à l'origine du nom donné à cette équation. On peut alors maintenant distinguer plusieurs cas de plus en plus généraux :

### Cas barotrope

Dans le cas où les variations de densité correspondent aux variations de pression (autrement dit la densité ne dépend que de la pression), l'équation (D.8) se simplifie et devient :

$$\boxed{2\Omega_0 \frac{\partial v_\phi}{\partial z} = 0} \quad (\text{D.9})$$

On retrouve alors le théorème de Taylor-Proudman selon lequel un fluide sous l'influence de la rotation tend à être aligné avec l'axe de rotation. Sa vitesse ne varie alors pas le long de celui-ci (Pedlosky, 1992).

### Cas barocline

On se place maintenant dans le cas plus général où les surfaces isobares ne sont pas forcément alignées avec les surfaces d'isodensité. On considère la même équation d'état linéarisée (5.14) que dans les simulations de la Partie III et l'équation des gaz parfaits (5.15), que l'on rappelle ci après :

$$\frac{\rho}{\bar{\rho}} = \frac{P}{\bar{P}} - \frac{T}{\bar{T}} = \frac{P}{\gamma\bar{P}} - \frac{S}{c_p} \quad (\text{D.10a})$$

$$\bar{P} = \mathcal{R}\bar{\rho}\bar{T} \quad (\text{D.10b})$$

Si de plus on considère que la stratification radiale est adiabatique (i.e.  $\frac{d\bar{S}}{dr} = 0$ ), alors :

$$\frac{1}{\gamma\bar{P}} \frac{d\bar{P}}{dr} = \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{d\bar{\rho}}{dr} \quad (\text{D.11})$$

On peut alors réécrire l'équation (D.8) de la façon suivante :

$$\boxed{\frac{\partial v_\phi}{\partial z} = \frac{g}{2\Omega_0 r c_p} \frac{\partial S}{\partial \theta}} \quad (\text{D.12})$$

après avoir utilisé la relation de l'équilibre hydrostatique  $\frac{d\bar{P}}{dr} = -\bar{\rho}g$ . Cette relation implique que l'établissement d'un gradient latitudinal d'entropie (et donc de température) permet d'obtenir des profils de rotation différentielle autre que cylindriques via un vent thermique. [Brun and Toomre \(2002\)](#) et [Browning et al. \(2004\)](#) ont étudié la présence d'un tel vent dans des simulations de convection sous l'influence de la rotation. Ils en ont déduit qu'il joue effectivement un rôle important mais pas toujours dominant par rapport au tenseur de Reynolds que l'on a ici négligé (cf équation (D.4)).  videmment, la présence de champ magnétique (que l'on n'a pas considéré ici) peut également jouer un rôle important dans la dynamique.







